Л.В.Галаєва, Н.А.Рогоза, Н.Г.Шульга

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

КИЇВ –2015

УДК 591.8 (075.8)

Рецензенти:
Єрмаков О.Ю., д.е.н., проф.(Національний університет біоресурсів і природокористування України),
Гудзь О.Є., д.е.н., проф.(Державний університет телекомунікацій),
Ріппа С.П., д.е.н., проф.(Навчально-науковий інститут інформаційних технологій та менеджменту Національного університету ДПС України).

Галаєва Л.В., Рогоза Ш.А., Шульга Н.Г.
Дослідження операцій /посібник [для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів] / Галаєва Л.В., Рогоза Ш.А., Шульга Н.Г. – К:. ЦП «Компринт», 2015. – с.

Розглянуто основні теми у відповідності зі стандартами щодо вивчення курсу «Дослідження операцій», розкрито основні теоретичні та практичні питання з економіко-математичного моделювання, відповідно темам курсу. Розроблено завдання для виконання індивідуальних практичних робіт та надані методичні рекомендації, щодо їх виконання.

Призначений для вивчення нормативної дисципліни «Дослідження операцій» студентами ОКР «Бакалавр» галузі знань 0305 «Економіка і підприємництво» напряму підготовки 6.030502 «Економічна кібернетика» та галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» напряму підготовки 6.030601 «Менеджмент»

Рекомендовано Вченою радою факультету інформаційних технологій НУБіП України, протокол № _ від __. 11. 2015 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА……………………………………………………….......... 4
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ………………………………………………………………….. 7
1.1.ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ 7
1.2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ………………………................. 10
1.3. ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ………… 34
1.4.МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ…................ 44
1.5.ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ…………………………………………………………….. 54
1.6. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ……... 68
1.7.ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ПАРАМЕТРАМИ…………………………………………………………..……… 85
ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 1…………………………………………... 100
РОЗДІЛ 2. ПРИКЛАДНЕ ВИКОРИСТАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ…………………………………………… 110
2.1. ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ……… 110
2.2. ОСНОВНІ ПРИЙОМИ ЕКОНОМІКО - МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ…………………………………………… 130
2.3. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ……………………………………………………... 135
РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ………………………….. 141
3.1.ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ…………… 141
3.2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ………………………………………………………… 152
3.3. ЗАДАЧІ УПОРЯДКУВАННЯ ТА КООРДИНАЦІЇ. СІТЬОВЕ ПЛАНУВАННЯ………………………………………. 167
3.4. ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ЗАМІНИ……………………….. 179
3.5. ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ……………………………………………………… 187
3.6.БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ МОДЕЛІ В МЕНЕДЖМЕНТІ 198
ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 3……………………………………………... 209
ГЛОСАРІЙ………………………………………………………… 215
ЛІТЕРАТУРА………………………………………………………. 230

ПЕРЕДМОВА

“Дослідження операцій є мистецтво знаходити не ідеальні відповіді на ті практичні питання, на які знаходяться ще гірші відповіді іншими методами”.

(Сааті Томас Л., професор Пенсільванського університету)

Дослідження операцій – це математична наука, що вивчає методи знаходження оптимальних рішень. У змістовному сенсі під дослідженням операцій розуміється – сукупність математичних, кількісних методів, використовуваних для обґрунтування прийнятих рішень у всіх сферах цілеспрямованої людської діяльності.

Сучасні економічні науки включають як природний і необхідний елемент математичні моделі й методи – і це не просто прихильність деяких дослідників до математики. Якби це було так, математичні моделі так і залишилися б красивим доповненням міркувань на економічні теми. Однак математичні моделі живуть, використовуються, на їх основі робляться практичні висновки, будуються теорії, отже, їх застосування зумовлене всім ходом розвитку економічної думки.

Використання математичних методів у економіці почалося досить давно. Перша у світі економічна модель була створена у XVIII столітті французьким економістом Ф. Кене. У XX столітті його «Економічна таблиця» послужила основою для побудови й розвитку численних моделей суспільного відтворення. Так, міжгалузева модель «Витрати – випуск» В. Леонтьєва є подальшим логічним кроком у продовження економічної таблиці Ф. Кене.

Розквіт застосування математичних методів у економіці ознаменувало XX століття. З їх використанням пов'язані роботи практично всіх учених, відзначених Нобелівською премією з економіки, наприклад, Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон.

Моделювати можна об'єкт будь-якої природи і складності, тому що теза про принципову неможливість моделювання рівносильна твердженню про принципову непізнаваність об'єкта. Це філософська теза. Людству загалом ніколи не потрібна була вичерпна пізнаваність, а тільки така, що на певному етапі розвитку продуктивних сил і виробничих відносин давала змогу вирішувати нагальні завдання. І саме складні об'єкти становлять найбільший інтерес для моделювання. Саме тут моделювання може дати і дає результати, які не можна одержати жодними іншими способами дослідження.

Дамо відповідь на запитання, якими ж є визначальні ознаки математичних методів, що використовуються у сучасній економіці. Чи є в них щось, що регулює їх застосування залежно від самих економічних процесів? Зрозуміло, що вони різні для окремих постановок задач. А як бути з масштабом економічних процесів, чи впливає він якось? У сучасних умовах і щодо економічних процесів принцип застосовності теорії дослідження операцій також змінився. Поставимо запитання: які задачі розв'язує дослідження операцій для економіки?

Оскільки оптимізація реальних систем завжди пов'язана з ефективним управлінням ними, то можна сказати також, що дослідження операцій – це дисципліна, що займається розробкою і практичним застосуванням ефективного управління різними організаційними системами.

Управління будь-якою системою реалізується як процес, що підпорядковується певним закономірностям, їх знання допомагає визначити умови, необхідні й достатні для оптимального управління. Для цього всі параметри, що характеризують цей процес, а також зовнішні умови, мають бути кількісно визначені. Отже, мета дослідження операцій – кількісне обґрунтування прийнятих рішень щодо організації оптимального управління і планування.

Дослідження операцій – досить нова комплексна наука, що виникла у ХХ столітті й увібрала в себе досягнення всіх наук, пов'язаних із знаходженням оптимальних рішень.

Термін «дослідження операцій» з'явився в роки Другої світової війни і бере початок від назви підрозділу засобів ППО Великобританії. Тоді вперше у збройних силах деяких країн (США, Великобританія) були сформовані спеціальні групи науковців, які мали готувати рішення для командуючих бойовими діями. Учені займалися конкретними завданнями й, або застосовували для їх вирішення уже відомі методи, або розробляли нові.

З огляду на своє призначення, дослідження операцій включає моделі лінійного, цілочислового, нелінійного, динамічного програмування, мережне планування, методи оптимізації на мережах і графах, теорію масового обслуговування і ряд інших розділів наук, пов'язаних із можливістю математичного моделювання реальних процесів з наступною їх оптимізацією. Використання конкретної моделі залежить від вихідних даних і принципів функціонування реального об'єкта.

Після закінчення Другої світової війни ці методи почали успішно розвивати і застосовувати до оптимізації та управління різноманітними сферами: промисловістю, будівництвом, сільським господарством, сферою обслуговування, транспортом, комунікаційними системами, торгівлею, охороною здоров'я та ін.

Часто видається, що назва «дослідження операцій» не відповідає предмету дослідження і методам, покладеним у його основу. Але вона не є єдиною. Американці, наприклад, використовують назву «теорія оптимального управління». На наш погляд, остання назва більш адекватно відбиває суть дослідження операцій, але в українській мові вона не узвичаїлася.

У процесі формування як стратегічних, так і тактичних рішень керівник змушений брати до уваги численні, нерідко взаємосуперечливі вимоги і спиратися на складні критерії досягнення кінцевих цілей. У цих умовах для досягнення високого рівня управління йому далеко не завжди вистачає професійних знань, власного досвіду, інтуїції й організаторських здібностей у їх традиційному розумінні. Потрібні науково обґрунтовані й точні методи прийняття рішень. Однак зауважимо, що сам реальний процес ухвалення рішення виходить за рамки науки дослідження операцій і належить до компетенції особи (частіше групи осіб), що приймає рішення. Неодмінна присутність людини не скасовується навіть у разі повної автоматизації системи управління.

Безумовно, при розв'язанні практичних задач можливі ситуації, коли роль неврахованих у моделі факторів настільки вирішальна, що особа, яка приймає рішення, одержавши рекомендації математичного моделювання, вважає за краще відкласти їх і діяти на основі власного досвіду й інтуїції. Це, однак, не є аргументом на користь тільки інтуїції і досвіду, а, скоріше, закликає до розробки більш досконалих моделей, чим, власне кажучи, і займається дослідження операцій в застосуванні до конкретних економічних систем.

Як кажуть у математиці, результат розв'язання за допомогою моделювання завжди виходить “з точністю до моделі ”.

Розділи 1,2 та завдання до них написані Галаєвою Л.В. та Шульгою Н.Г., передмова та розділ 3 – Рогозою Н.А. Автори висловлюють вдячність за надані матеріали Глаголєвій І.І. та Жадлун З.О.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Під ***математичним програмуванням*** розуміють розділ вищої математики, що займається вивченням та розробкою методів розв'язку спеціального класу задач, в яких відшукується максимум чи мінімум деякої цільової функції (функціонала). При цьому область існування мінімуму та максимуму обмежена економічними, агрономічними, зоотехнічними та іншими умовами, що записуються у вигляді рівнянь та нерівностей.

Подібні задачі давно цікавили фахівців різних галузей знань. Проте універсальні методи розв'язку таких задач інтенсивно почали розроблятися з сорокових років 20-го сторіччя. У 1947р. американським математиком Дж.Данцігом був розроблений універсальний метод (симплекс-метод) для розв'язання загальної задачі лінійного програмування. Після цього методи математичного програмування почали інтенсивно розробляти та впроваджувати.

Задача математичного програмування у загальному вигляді формулюється так: потрібно знайти значення $\boldsymbol{n}$ змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють $\boldsymbol{m}$ умовам (рівнянням, нерівностям):

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \{\geq, =, \leq\} B_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1.1.1)$$

та максимізують чи мінімізують функцію

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (1.1.2)$$

Умови виду (1.1.1) називаються обмеженнями, а функція $\boldsymbol{Z}$ виду (1.1.2) – цільовою функцією (функціоналом), праві частини обмежень $\boldsymbol{B_i}$ – задані константами (постійними величинами).

У кожному із обмежень (1.1.1) зберігається лише один із знаків $(\geq, =, \leq)$; на змінні, як правило, накладаються умови невід'ємності, тобто $(x_j \geq 0)$, а в окремих випадках повинна виконуватися умова цілочисельності змінних, тобто x_j може набувати лише цілих значень.

Таким чином, ***предметом математичного програмування*** є знаходження методів розв'язання екстремальних (оптимізаційних) задач з умовами (1.1.1) і функціоналом (1.1.2) та дослідження отриманого розв'язку.

Вибір методів розв'язання оптимізаційних задач визначається рядом чинників і залежить насамперед від того, в якій математичній формі задані умови (1.1.1) та (1.1.2). Наприклад, якщо ці умови задані у вигляді лінійних співвідношень (рівнянь та нерівностей), то задача розв'язується методами лінійного програмування.

Потрібно враховувати, що задачі одного типу і навіть одна окрема задача можуть мати декілька можливих варіантів і методів розв'язку. Проте спільним для розв'язку задач математичного програмування, як правило, залишається ***принцип послідовного переходу від деякого початкового допустимого рішення до остаточного оптимального розв'язку.***

Досягнення оптимального рішення здійснюється за принципом поступового покращення початкового варіанта, застосовуючи відповідний метод розрахунків (алгоритм).

Клас задач математичного програмування та кількість методів їх розв'язання досить широкий. Тому математичне програмування залежно від того, в якому вигляді, в якій математичній формі задаються умови (1.1.1) та (1.1.2) поділяється на ***лінійне та нелінійне програмування***. До задач нелінійного програмування відносяться такі, в яких умови (1.1.1) або (і) цільова функція (1.1.2) задані у нелінійній (наприклад, квадратичній чи гіперболічній) формі.

Залежно від того, враховуються при вивченні об'єкта його зміни в часі чи ні, математичне програмування поділяється, відповідно, на ***динамічне та статичне***. Проте термін "статичне програмування" не одержав широкого розповсюдження, а динамічне програмування часто зводять до спеціального, досить складного обчислювального методу.

Непогано вивченим розділом математичного програмування вважається лінійне програмування. До того ж багато задач нелінійного програмування можуть бути зведені до задач лінійного програмування, оскільки нелінійні залежності можна апроксимувати лінійними.

Нелінійні задачі математичного програмування не зводяться до певної стандартної форми. Тип задач визначається типом функцій, які входять до цільової функції та обмежень. Не існує загального універсального методу розв'язування нелінійних задач.

Загальна задача нелінійного програмування полягає у знаходженні певного виду екстремуму цільової функції:

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

на множині планів задачі,яка визначається системою умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le = \ge\} b_i \;, \quad (i = 1,2,...,m),$$

де всі функції (або їх частина) нелінійні.

До ***дробово-лінійних*** задач відносяться такі, в яких, як правило, цільова функція представлена дробовим виразом, чисельник і знаменник якого – лінійні функції багатьох змінних.

До задач ***квадратичного*** програмування відносять ті нелінійні задачі, які мають лінійні обмеження і функцію мети, що становить суму квадратичної і лінійної форм.

Задачами ***опуклого*** програмування називають нелінійні задачі типу:

$$\begin{aligned} &Z = f(x) \to (\max), \\ &g_i(x) \le b_i, (i = 1,2,...,u), \\ &g_i(x) = b_i, (i = u+1,...,m), \\ &x_j \ge 0, (j = 1,2,...,n), \end{aligned}$$

у яких усі функції системи обмежень опуклі, усі обмеження однотипні нерівності типу $\le$ або =.

Функція мети в задачах максимізації вгнута, а в задачах мінімізації – опукла.

До нелінійних задач з ***сепарабельними*** функціями відносять задачі, у яких функція мети і система обмежень виражені сепарабельними функціями.

Сепарабельною називають функцію n змінних, виду:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n),$$

що є сумою n функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Цілочисельні задачі математичного програмування – це задачі, на змінні яких накладено умови цілочисельності. Якщо крім вимоги цілочисельності змінних усі обмеження і функція мети мають лінійний вигляд, то це будуть так звані цілочисельні лінійні задачі.

Для задач ***динамічного*** програмування характерним є багатокроковий процес розв’язування задачі.

Всі вказані типи задач містять лише детерміновані (невипадкові) величини. Якщо оптимальне рішення треба прийняти в умовах невизначеності, то виникає так звана ***стохастична*** задача. Іноді стохастична задача формулюється як задача визначення плану, що максимізує ймовірність досягнення певного рівня виробництва, прибутку чи витрат. У стохастичних задачах деякі параметри можуть бути випадковими.

Методи розв'язування задач нелінійного програмування

Специфіка окремих типів нелінійних задач зумовила значну різноманітність методів їх розв'язування.

Класичним методом оптимізації, тобто знаходження екстремуму функції кількох змінних, коли на ці змінні ніяких обмежень не накладено, є ***метод множників Лагранжа***.

Для розв'язування задач квадратичного програмування застосовують ***метод Вольфа, градієнтні методи***.

Для розв'язування нелінійних задач з сепарабельними функціями застосовують їх ***лінеаризацію***.

Цілочисельні задачі можна розв'язувати ***методом Гоморі, методом вектора спаду***, динамічні задачі – ***методом рекурентних співвідношень***.

Методи розв'язування нелінійних задач математичного програмування пов'язані, як правило, з великою кількістю громіздких обчислень.

1.2. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

З економічної точки зору постановка задачі лінійного програмування про використання виробничих ресурсів зводиться до розподілу різноманітних дефіцитних ресурсів між можливими способами виробництва так, щоб у результаті реалізації цієї програми досягався найвищий сумарний ефект, що знаходить свій вираз у конкретній (максимальній чи мінімальній) величині деякої вибраної наперед цільової функції (наприклад, максимальному прибутку).

Математично задача лінійного програмування полягає у відшуканні невід'ємних значень $\boldsymbol{n}$ змінних, що задовольняють $\boldsymbol{m}$ лінійним обмеженням

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} b_i, \qquad i = (1, 2, \dots, m); \qquad (1.2.1)$$

та максимізують чи мінімізують лінійну функцію

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (1.2.2)$$

за умови, що $x_j \geq 0, \qquad j = (1, 2, \ldots, n),$ (1.2.3)

де j – індекс змінної;

i – індекс обмеження;

(a_{ij}, b_i, c_j) – наперед задані величини – техніко-економічні коефіцієнти, обсяги обмежень (константи), оцінки змінних;

x_j – невідомі змінні величини.

Представлений запис економічної задачі (1.2.1) – (1.2.3) називають ***структурною економіко-математичною моделлю***.

Відповідно до постановки задачі, її змісту, кожна умова конкретизується та разом з прийнятими математичними позначеннями повинна мати чітке змістовне представлення.

Так, умова (1.2.1) може, наприклад, відображати те, що сумарні витрати конкретного i -го виду ресурсу (наприклад, затрати грубих кормів) на виробництво всіх видів тваринницької продукції в аграрному підприємстві не повинні перевищувати загальної кількості цих кормів, що є у розпорядженні підприємства. У цьому випадку дана умова запишеться так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad (1.2.4)$$

де a_{ij} – затрати грубих кормів на одиницю продукції тваринництва j-го виду;

x_j – шуканий обсяг виробництва тваринницької продукції j –го виду;

b_i – обсяг наявних у підприємстві грубих кормів.

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (1.2.1), називають ***допустимим*** розв’язком, або допустимим планом задачі. Сукупність допустимих розв’язків (планів) задачі утворює ***область допустимих розв’язків*** задачі.

Опорним планом задачі лінійного програмування називається план, утворений координатами вершин многогранника планів задачі.

Опорний план – це план, який задовольняє не менш, ніж m лінійно незалежних обмежень (1.2.1) у вигляді строгих рівностей разом з обмеженнями щодо знака змінних (1.2.3).

Опорний план називається ***невиродженим***, якщо він є вершиною многогранника планів задачі, утвореною перетином n лінійно незалежних обмежень – строгих рівностей. В іншому випадку опорний план є ***виродженим***.

Наведемо приклад постановки задачі лінійного програмування.

Задача 1.2.1. Підприємство має три види ресурсів ($\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$, $\boldsymbol{R_3}$) в обсягах: $\boldsymbol{R_1}$=20, $\boldsymbol{R_2}$=40, $\boldsymbol{R_3}$=30 одиниць. Використовуючи ці ресурси можна виробляти два види продукції ($\boldsymbol{P_1}$ та $\boldsymbol{P_2}$).

Запаси сировини, кількість одиниць сировини, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, а також величина прибутку, який отримують від реалізації одиниці продукції наведені в табл. 1.2.1.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

Таблиця 1.2.1

Нормативи витрат ресурсів та прибуток у розрахунку на одиницю продукції

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	
$\boldsymbol{R_1}$	2	5	20
$\boldsymbol{R_2}$	8	5	40
$\boldsymbol{R_3}$	5	6	30
Прибуток, грош.од.	50	40	

Для складання задачі лінійного програмування використаємо такі позначення:

$\boldsymbol{x_1}$ – обсяг виробництва продукції виду P_1;

$\boldsymbol{x_2}$ – обсяг виробництва продукції виду P_2.

Згідно з заданими нормативами витрат, обсягами ресурсів, наявних у підприємстві, складемо наступну систему лінійних співвідношень (нерівностей):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1)}\ \mathbf{2}x_1 + \mathbf{5}x_2 \le \mathbf{20},\\
&\mathbf{2)}\ \mathbf{8}x_1 + \mathbf{5}x_2 \le \mathbf{40},\\
&\mathbf{3)}\ \mathbf{5}x_1 + \mathbf{6}x_2 \le \mathbf{30},\\
&\mathbf{4)}\ x_1 \ge \mathbf{0},\quad x_2 \ge \mathbf{0}.
\end{aligned} \qquad (1.2.5)$$

Критерій оптимальності (досягнення максимального прибутку від виробничої програми) формалізується у вигляді цільової функції:

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \to \max. \qquad (1.2.6)$$

Перше обмеження системи (1.2.5) відображає умову використання ресурсу R_1: використана у виробничому процесі кількість ресурсу не повинна перевищувати наявного обсягу. Друга нерівність характеризує співвідношення між затратами та наявністю ресурсу R_2. Третя – вказує на те, що використання ресурсу R_3 не перевищує наявного обсягу. Четверта умова – це природні обмеження на знак змінних, оскільки від'ємне виробництво з економічної точки зору абсурдне.

Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування геометрично інтерпретується так: кожне i-те обмеження, що має вигляд рівняння $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, у n-вимірному просторі основних змінних задає гіперплощину. Кожному обмеженню-нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i$ задачі відповідають гіперплощина та півпростір, що лежить по один бік цієї гіперплощини. Перетином усіх гіперплощин утворюється опуклий многогранник допустимих розв'язків задачі.

Цільову функцію в n-вимірному просторі основних змінних задачі можна представити як множину паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається параметром Z.

Наведемо геометричну інтерпретацію задачі для двовимірного простору основних змінних.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to max, \qquad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \qquad (1.2.8) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{aligned}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1;2. \qquad (1.2.9)$$

Кожне i-те обмеження задає рівняння граничної прямої $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Кожному обмеженню-нерівності задачі $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ відповідають пряма та півплощина, що лежить по один бік цієї прямої. Перетином усіх півплощин утворюється опуклий многокутник допустимих розв'язків задачі.

Отже, геометричний зміст нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$ такий: нерівність визначає граничну пряму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, яка поділяє площину на дві півплощини: додатну $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 > b_i$ та від'ємну $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$. Для того, щоб побудувати обмеження-нерівність, необхідно побудувати граничну пряму $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ за двома точками, а потім визначити півплощину, що задовольняє дану нерівність.

Якщо гранична пряма не проходить через початок координат, то для визначення півплощини зручно в нерівність підставити координати точки початку координат – O(0;0). Якщо нерівність при цьому виконується, то початок координат (а відповідно і всі інші точки з цієї сторони від прямої) належать півплощині. При невиконанні нерівності початок координат не належить шуканій півплощині.

Якщо початок координат належить граничній прямій, то для визначення шуканої півплощини підставляють у задану нерівність координати будь-якої іншої точки (що не належить граничній прямій).

Умова невід'ємності змінних (1.2.9) означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору.

Цільову функцію в двовимірному просторі основних змінних задачі можна представити як множину паралельних прямих, положення кожної з яких визначається параметром ***Z=const***.

Оскільки ***областю допустимих розв'язків*** (планів) є фігура, що утворена перетином півплощин, які визначають усі нерівності системи обмежень й умови невід'ємності змінних задачі, то для знаходження області допустимих розв'язків задачі необхідно побудувати півплощини для кожного обмеження та для умови невід'ємності змінних і визначити область, спільну для всіх півплощин.

Цільовій функції ***Z*** можна надати будь-якого значення і побудувати пряму, що відповідає виразу ***Z=const***. Пряма, одержана таким чином, називається ***лінією рівня***. Оскільки цільовій функції можна надати безліч дійсних значень, то можна отримати й безліч ліній рівня. Усі лінії рівня паралельні між собою.

Напрямок максимізації цільової функції показує вектор-градієнт. Введемо поняття градієнта функції ***Z***.

Для цільової функції

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

вектор-градієнт

$$\overline{grad}\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1};\frac{\partial Z}{\partial x_2}\right) = (c_1; c_2).$$

Таким чином, вектор-градієнт – це вектор, який виходить з початку координат та проходить через точку $(c_1; c_2)$, координати якої є частинними похідними цільової функції. Вектор-градієнт вказує напрямок зростання цільової функції. Вектор-градієнт та лінії рівня ***перпендикулярні*** між собою.

Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

Графічний метод зручний своєю наочністю, дає можливість зрозуміти основні властивості задач лінійного програмування та проаналізувати їх розв’язки. Незручність графічного методу полягає у тому, що він застосовується до задач невеликої розмірності, зазвичай задач з двома чи трьома змінними.

Розглянемо послідовність розв’язування задач лінійного програмування графічним методом детальніше.

Розв’язати задачу лінійного програмування графічно означає: керуючись напрямком вектора-градієнта, знайти таку вершину многокутника планів задачі, координати якої надаватимуть цільовій функції екстремального (максимального або мінімального) значення.

Схема ***алгоритму графічного методу***:

1. Будуємо граничні прямі, рівняння яких одержуємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі, враховуючи й обмеження змінних.

3. Знаходимо многокутник розв'язків (планів) задачі лінійного програмування (область допустимих розв’язків – ОДР).

4. Будуємо вектор-градієнт $\overline{grad} = (c_1; c_2)$, що задає напрямок зростання значень цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$, перпендикулярну до вектора-градієнта.

6. Рухаємо пряму $Z = const$ паралельно самій собі у напрямку вектора-градієнта $\overline{\mathbf{grad}}$ для задач максимізації Z і в протилежному напрямку – для задач мінімізації Z доти, доки вона не буде проходити

через крайню точку області допустимих розв’язків, найбільш віддалену (найменш віддалену – у випадку мінімуму Z) від початку координат.

При цьому можуть бути такі випадки:

а) функція Z та ОДР мають одну крайню точку, координати якої визначають єдиний оптимальний розв'язок задачі (рис. 1.2.1);

б) функція Z та одна із сторін області допустимих розв'язків паралельні; в цьому випадку цільова функція досягає оптимального значення в будь-якій точці цієї сторони, тобто існує нескінченна множина оптимальних розв'язків задачі (альтернативний оптимум) (рис. 1.2.2);

в) у напрямку вектора-градієнта $\overline{\mathbf{grad}}$ область допустимих розв'язків (ОДР) не обмежена; в цьому випадку задача не має розв'язку, цільова функція необмежена з боку максимуму (рис. 1.2.3); (аналогічно ОДР може бути необмеженою з боку мінімуму);

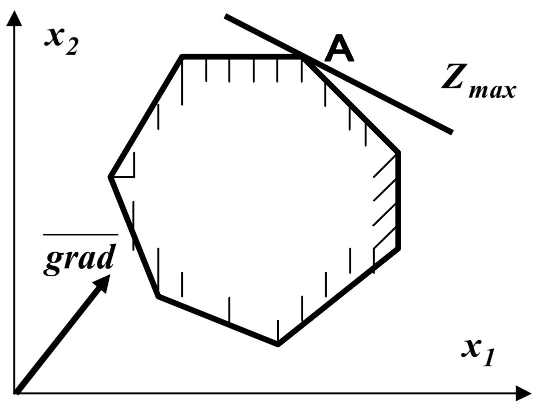


Рис.1.2.1

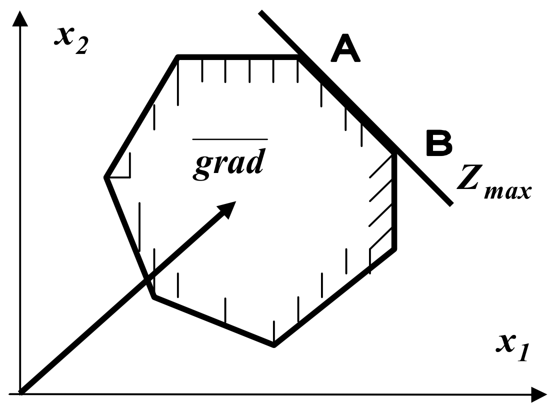


Рис.1.2.2

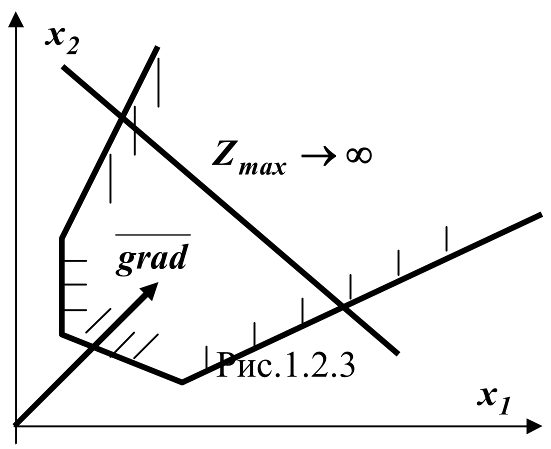


Рис.1.2.3

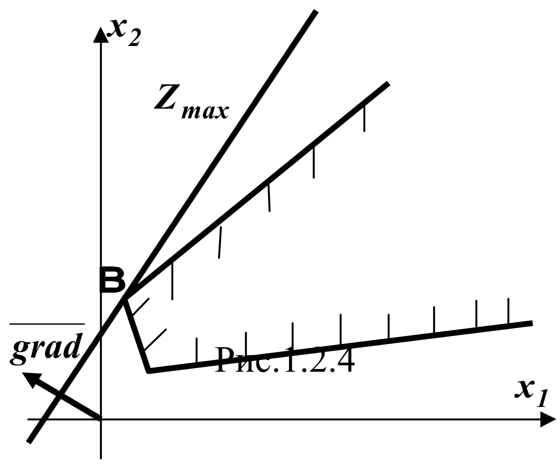


Рис.1.2.4

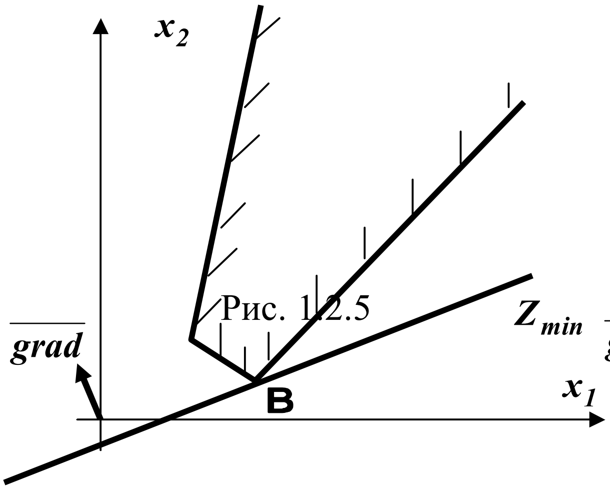


Рис. 1.2.5

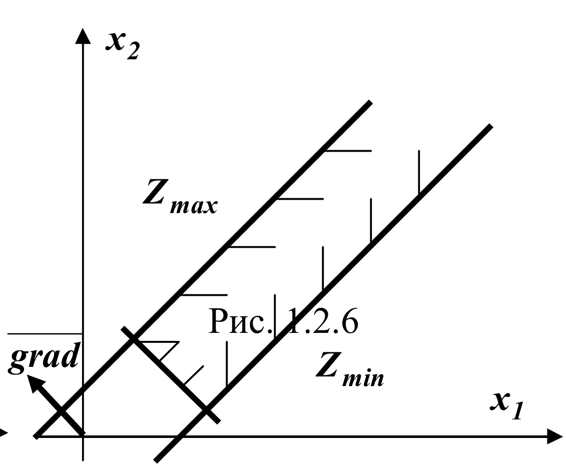


Рис. 1.2.6

г) область допустимих розв’язків задачі – необмежена, але задача має оптимальний план. На рис. 1.2.4 у точці В досягається максимум, на рис. 1.2.5 у точці В – мінімум, на рис. 1.2.6 цільова функція набуває на сторонах ОДР як максимальне, так і мінімальне значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Зауваження! У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування може зустрітися випадок, коли область допустимих значень задачі – пуста, система основних обмежень задачі не сумісна. У цьому разі задача лінійного програмування розв’язків не має, її умови потребують корегування (рис. 1.2.7).

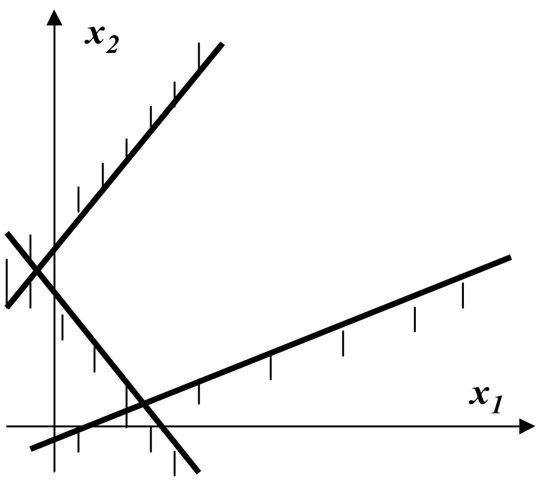


Рис. 1.2.7

Розглянемо практичне застосування алгоритму графічного методу на прикладі розв'язання задачі 1.2.1 (табл. 1.2.1).

Математичний запис задачі такий (формули 1.2.5; 1.2.6):

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \to \max.$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 20,$$
$$8x_1 + 5x_2 \le 40,$$
$$5x_1 + 6x_2 \le 30,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання.

Перший крок полягає в геометричному зображенні допустимого плану задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження задачі. Для цього згідно з пунктом 1 алгоритму будуємо граничні прямі, що відповідають першим трьом умовам. Враховуємо те, що ОДР задачі належить першому квадранту координатної площини (тобто виконаємо умову невід'ємності змінних).

Наприклад, необхідно зобразити графічно нерівність $2x_1 + 5x_2 \le 20$. На декартовій площині будуємо граничну пряму, що визначається рівністю L_1: $2x_1 + 5x_2 = 20$, за двома точками (0;4) і (10;0) (рис 1.2.8).

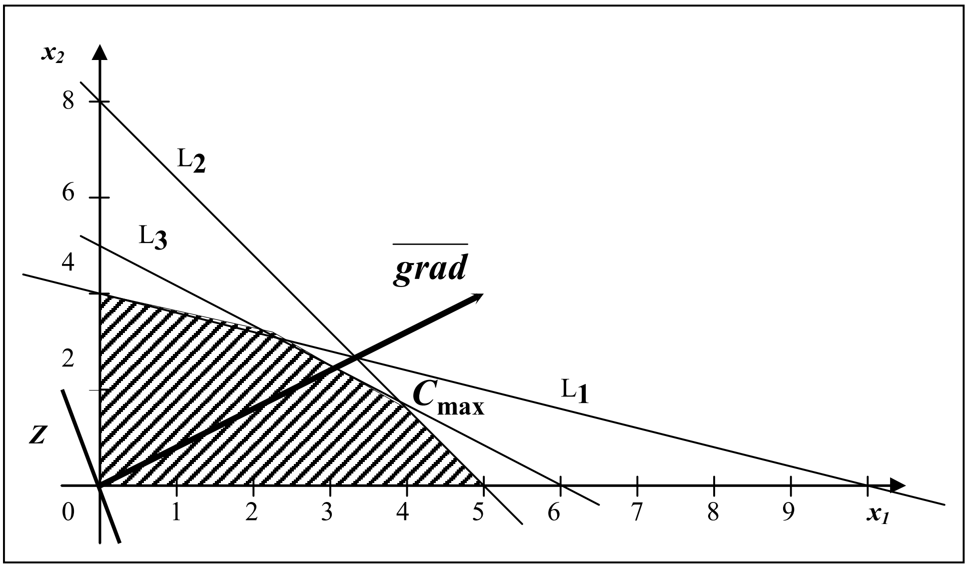


Рис.1.2.8.

Гранична пряма не проходить через початок координат, тому підставляємо у нерівність координати точки (0;0). Одержуємо вірну нерівність $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 20$, отже початок координат належить півплощині, що визначає нерівність $2x_1 + 5x_2 \le 20$. Отже, півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності.

Аналогічно будуємо граничні прямі L_2: $8x_1 + 5x_2 = 40$ за двома точками (0;8) і (5;0) та L_3: $5x_1 + 6x_2 = 30$ за точками (0;5) і (6;0). Переконуємося, що точка (0;0) належить півплощинам:

$$8 \cdot 0 + 5 \cdot 0 < 40,$$
$$5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 < 30.$$

Спільною областю для знайдених півплощин, з урахуванням невід'ємності змінних, є область допустимих розв'язків (заштрихована область на рис.1.2.8).

Для побудови прямої Z=0 будуємо вектор-градієнт $\overline{grad}$ (50;40), або $\overline{grad}$ (5;4) та через точку (0;0) проводимо пряму, перпендикулярну до нього.

Побудовану пряму Z=0 рухаємо паралельно самій собі у напрямку вектора $\overline{\mathbf{grad}}$, оскільки задачу розв'язуємо на максимум. Останньою спільною (максимальною) точкою області допустимих розв'язків і прямої цільової функції Z є точка **C**, яка лежить на перетині прямих L_2 і L_3. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва продукції видів P_1 та P_2 , що максимізують прибуток від їх реалізації.

Для знаходження координат точки **C** розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Розв'язавши систему рівнянь (1.2.10), знаходимо: $x_1 = 3{,}91;$ $x_2 = 1{,}74$.

Підставивши значення x_1 та x_2 в лінійну функцію, маємо
$$Z_{max} = 50x_1 + 40x_2 = 50 \cdot 3{,}91 + 40 \cdot 1{,}74 = 265{,}10.$$

Отже, максимально можливий прибуток при заданих умовах буде становити 265,10 грошових одиниць.

Відповідь задачі:

$Z_{\max} = 265{,}10;$ $X_{\max}(3{,}91; 1{,}74).$	або	$Z_{max} = 265{,}10;$ $x_1^* = 3{,}91;\ x_2^* = 1{,}74.$

Максимально можливий прибуток при заданих умовах задачі можна отримати в розмірі 265,10 грошових одиниць при виробництві продукції виду P_1 в обсязі 3,91 одиниці, виду P_2 – 1,74 одиниці.

Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Одним з ***універсальних*** методів розв'язування задач лінійного програмування є симплексний. Симплексний метод застосовується до задач, записаних у ***стандартній формі*** з будь-якою кількістю змінних, тобто виду:

$$\begin{aligned} & Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = \overline{1,m}, \\ & x_j \geq 0, \qquad\qquad j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

При розв'язуванні задачі лінійного програмування симплексним методом необхідно:

1) знайти опорний план задачі;
2) встановити ознаку, за якою можна визначити, чи є опорний план оптимальним;
3) якщо початковий опорний план не оптимальний, необхідно перейти до іншого, більш близького до оптимального за певними правилами (виконати крок жорданових вилучень) і виконувати такі дії доти, доки не буде знайдено оптимальний план або встановлено, що задача лінійного програмування не має розв'язку.

Опорним планом задачі лінійного програмування називається план, що є координатами вершини многогранника планів задачі: $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$.

Опорний план, при якому цільова функція приймає екстремальне значення, називається ***оптимальним планом*** задачі і позначається $x^* = (x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*)$.

Якщо задача лінійного програмування має розв'язок, то її оптимальний план збігається хоча б з одним із опорних розв'язків (планів) системи рівнянь.

Отже, оптимальний план відшукується симплекс-методом у результаті послідовного впорядкованого перебору опорних планів. Впорядкованість слід розуміти так, що при переході від одного опорного плану до іншого для задач максимізації відповідні їм значення цільової функції збільшуються (не зменшуються). Тому симплексний метод ще називають ***методом послідовного поліпшення плану.***

У ***геометричному розумінні*** перебір опорних планів означає перехід від однієї вершини многогранника планів задачі до іншої у напрямку до вершини x^*, в якій цільова функція досягає екстремального значення (максимального або мінімального).

Алгоритм розв'язку задач симплекс-методом розглянемо на конкретному прикладі.

Розглянемо задачу лінійного програмування (задача 1.2.1, формули 1.2.5, 1.2.6):

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Z = 50x_1 + 40x_2 \to max,}\\
&\boldsymbol{2x_1 + 5x_2 \le 20,}\\
&\boldsymbol{8x_1 + 5x_2 \le 40,}\\
&\boldsymbol{5x_1 + 6x_2 \le 30,}\\
&\boldsymbol{x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.}
\end{aligned}$$

1. Представимо задачу в стандартній формі, виду (1.2.11), тобто всі нерівності перетворимо у рівняння. Для цього у ліву частину кожного обмеження-нерівності системи введемо невід'ємні додаткові змінні, які візьмемо зі знаком мінус ("-") для обмеження типу $''\ge''$ і зі знаком плюс ("+") для обмеження типу $''\le''$.

Отже, отримаємо такий запис:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Z = 50x_1 + 40x_2 \to max,}\\
&\boldsymbol{2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad\qquad = 20,}\\
&\boldsymbol{8x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 \qquad = 40,}\\
&\boldsymbol{5x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + x_5 = 30,}\\
&\boldsymbol{x_{\overline{1,5}} \ge 0.}
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

2. На ***першому етапі*** розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом знаходимо опорний план.

Алгоритм визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування

Перший крок алгоритму симплекс-методу для **відшукання опорного плану** такий: записати задачу у формі жорданової таблиці так, щоб усі елементи стовпчика вільних членів (останній стовпчик таблиці) були невід'ємними (табл. 1.2.2). Ті рівняння системи, в яких вільні члени від'ємні, помножимо на (-1). У $\boldsymbol{Z}$-рядок значення коефіцієнтів цільової функції записуємо з протилежним знаком.

Таблиця 1.2.2

Базис	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
0=	2	5	1	0	0	20
0=	8	5	0	1	0	40
0=	5	6	0	0	1	30
$\boldsymbol{Z}$=	-50	-40	0	0	0	0

Ідея симплексного методу полягає в переході від однієї жорданової таблиці до іншої за певними правилами. Для цього виконують такі дії.

1. Вибирають (за певним правилом) ***розв'язуючий стовпчик*** і за мінімальним симплексним співвідношенням – ***розв'язуючий рядок.***

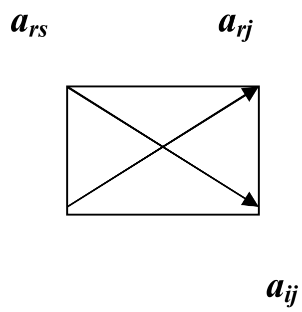
Симплексне співвідношення – відношення вільних членів до відповідних додатних елементів розв'язуючого стовпчика.

2. На перетині розв'язуючого стовпчика та розв'язуючого рядка знаходимо ***розв'язуючий елемент***.

3. У наступній симплексній таблиці базисний і небазисний елементи на рівні розв'язуючого елемента міняються місцями.

4. Розраховуємо елементи нової таблиці, виконуючи ***крок модифікованих жорданових вилучень***:

- розв'язуючий елемент замінюємо на обернений;
- решту елементів розв'язуючого стовпчика ділимо на розв'язуючий елемент та знаки міняємо на протилежні;
- решту елементів розв'язуючого рядка ділимо на розв'язуючий елемент;
- елементи, що не ввійшли ні в рядок, ні в колонку, де стоїть розв'язуючий елемент, знаходимо за правилом чотирикутника (1.2.13):



$$a'_{ij} = \frac{a_{rs} \cdot a_{ij} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}, \qquad (1.2.13)$$

де a_{rs} – розв’язуючий елемент.

Зауваження! Якщо у стовпчику базисних змінних є хоч один нуль, на цьому кроці розв’язуючим можна вибрати будь-який стовпчик, у якому є хоча б один додатний елемент. Розв’язуючий рядок визначається за симплексним співвідношенням.

Якщо в процесі жорданових виключень зустрінеться:

1) нуль-рядок, всі елементи якого нулі, а вільний член відмінний від нуля, то система рівнянь розв’язків не має, а отже не має розв’язків і задача лінійного програмування;

2) нуль-рядок, у якому крім вільного члена інших додатних елементів немає, то система умов не має невід’ємних розв’язків. Задача лінійного програмування також не має розв’язків;

3) якщо система умов сумісна, то через декілька кроків всі нулі у лівому стовпчику будуть заміщені x і тим самим одержано деякий базис і відповідний йому опорний план.

Розв’язуючи задачу 1.2.12 після трьох ітерацій (кроків) одержали табл.1.2.3.

Таблиця 1.2.3

Базис	$-x_1$	$-x_2$	1
x_3=	2	5	20
x_4=	8	5	40
x_5=	5	6	30
Z=	-50	-40	0

Кількість стовпчиків у таблиці скоротилась. Зменшення кількості стовпчиків відбувається до того часу, доки не буде знайдено опорний план, тобто поки всі нулі у лівому стовпчику не будуть замінені на x_j. Якщо цього вдасться досягти, то буде знайдено опорний план.

Ознакою опорності плану є відсутність нулів у базисному стовпчику та відсутність від'ємних елементів у стовпчику вільних членів (крім елемента у Z-рядку).

Випишемо опорний план (розв'язок) задачі, тобто координати точки, визначеної в табл.1.3 та значення цільової функції в цій точці. Для цього прирівнюємо до нуля небазисні змінні та виписуємо значення базисних змінних із стовпчика вільних членів. Отже:

$\boldsymbol{x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 20; \quad x_4 = 40; \quad x_5 = 30.}$

Значення цільової функції знаходимо на перетині стовпчика вільних членів і Z-рядка. У нас Z=0.

Перший етап розв'язування задачі лінійного програмування, що полягав у знаходженні опорного плану, на цьому закінчено.

Таким чином, на першому етапі або одержують опорний план, або приходять до висновку про несумісність системи рівнянь, а отже і відсутність розв'язків задачі лінійного програмування.

Другий етап розв'язування задачі лінійного програмування полягає у відшуканні оптимального плану.

Алгоритм знаходження оптимального плану задачі лінійного програмування

При відшуканні ***максимуму*** лінійної форми досліджується на оптимальність початковий опорний план задачі лінійного програмування.

1. План вважатиметься оптимальним, якщо у Z-рядку відсутні від'ємні елементи (за винятком вільного члена). Якщо в Z-рядку немає також і нулів, то оптимальний план єдиний; якщо ж серед елементів Z-рядка є хоча б один нуль, то оптимальних планів безліч, тобто задача має альтернативний оптимум.

2. Якщо в Z-рядку є хоч би один від'ємний елемент, а у відповідному йому стовпчику нема додатних, то функція мети необмежена в області допустимих розв'язків. Тобто $Z_{max} \to \infty$. Задача лінійного програмування не має розв'язку.

3. Якщо в Z-рядку є хоча б один від'ємний елемент, а в кожному стовпчику з таким елементом є хоча б один додатний, то можна перейти до нового опорного плану, більш близького до оптимального. Для цього стовпчик з від'ємним елементом у Z-рядку беруть за розв'язуючий.

Якщо в Z-рядку від'ємних елементів декілька, розв'язуючим вибирають стовпчик з найбільшим за абсолютною величиною від'ємним елементом. Далі за мінімальним симплексним співвідношенням визначають розв'язуючий рядок, на перетині розв'язуючих стовпчика та рядка знаходиться розв'язуючий елемент.

При виконанні жорданових вилучень базисні та вільні змінні міняються місцями.

Елементи наступної симплексної таблиці знаходимо, виконуючи крок модифікованих жорданових виключень. Таким чином буде одержаний новий опорний план, який знову досліджується на оптимальність.

Описаний процес обчислень повторюють доти, доки не буде одержаний оптимальний план. Для прикладу1.1 в табл.1.3.отримали план, оптимальний на мінімум (за ознакою оптимальності на мінімум). Для знаходження максимуму за розв'язуючий вибираємо перший стовпчик за максимальним за абсолютною величиною значенням від'ємного елемента у Z-рядку. Розв'язуючий рядок знаходимо за симплексним співвідношенням, тобто

$$\boldsymbol{min}\left(\frac{20}{2};\frac{40}{8};\frac{30}{5}\right)=\frac{40}{8}.$$

На перетині розв'язуючих стовпчика та рядка отримуємо розв'язуючий елемент і виділяємо його в рамочку (табл. 1.2.4).

Таблиця 1.2.4

Базис	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3=$	2	5	20
$x_4=$	$\boxed{8}$	5	40
$x_5=$	5	6	30
$Z=$	-50	-40	0

Виконуємо крок модифікованих жорданових вилучень і отримуємо табл.1.2.5.

Таблиця 1.2.5

Базис	$-x_4$	$-x_2$	1
$x_3=$	$-1/4$	$15/4$	10
$x_1=$	$1/8$	$5/8$	5
$x_5=$	$-5/8$	$\boxed{23/8}$	5
$Z=$	$25/4$	$-35/4$	250

Або у вигляді десяткових дробів (табл. 1.2.6).

Таблиця 1.2.6

Базис	$-x_4$	$-x_2$	1
x_3=	-0,25	3,75	10
x_1=	0,13	0,63	5
x_5=	-0,63	$\boxed{2,88}$	5
Z=	6,25	-8,75	250

Перевіряємо цей план на оптимальність і оскільки він не оптимальний, робимо ще один крок та одержуємо план (табл. 1.2.7):

Таблиця 1.2.7

Базис	$-x_4$	$-x_5$	1
x_3=	0,57	-1,30	3,48
x_1=	0,26	-0,22	3,91
x_2=	-0,22	0,35	1,74
Z=	5,04	3,04	265,10

Отримали оптимальний розв'язок.

Відповідь задачі:

$$x_1^* = 3{,}91,\quad x_2^* = 1{,}74,\quad x_3^* = 3{,}48,\quad x_4^* = 0,\quad x_5^* = 0;$$

$\mathbf{Z_{max}=265{,}10}$.

Такі ж значення невідомих отримали, розв'язуючи задачу графічним методом.

Зауваження ! Для задач ***мінімізації*** ознакою оптимальності плану є відсутність додатних елементів у ***Z***-рядку. Тому при відшуканні мінімуму за розв'язуючий вибирають стовпчик, у якому в ***Z***-рядку міститься найбільший додатний елемент.

Метод штучного базису (М-метод)

Алгоритм симплексного методу розв'язування задач лінійного програмування має два основних етапи: знаходження опорного плану, відшукання оптимального плану. Окрім того, симплексному методу передує етап відшукання довільного базисного розв'язку.

Метод штучного базису дає можливість сумістити підготовчий етап відшукання довільного базисного розв'язку з відшуканням опорного плану та прискорити проходження етапу відшукання оптимального плану. Завдяки цьому вдається скоротити загальний обсяг обчислень, і, окрім того, встановити, чи існує взагалі хоча б один план задачі, тобто чи система умов задачі не суперечлива.

Ідея методу полягає у створенні штучного опорного плану шляхом введення штучних базисних змінних у обмеження, які після приведення задачі до стандартної постаті , їх не мають.

Рекомендації: спочатку треба привести задачу до стандартної постаті, потім, якщо необхідно, помножити обмеження на «-1», щоб отримати систему обмежень-рівнянь з невід'ємними вільними членами. Після цього до лівих частин обмежень, що не містять базисних змінних, додати по одній ***штучній змінній*** $x_{n+i} \geq 0$, утворивши таким чином штучний базис.

Щоб знайти деякий план задачі, необхідно вивести всі штучні змінні з базису. Якщо цього зробити не вдається, то це свідчить про суперечливість системи умов задачі.

Теорема. План, який містить хоча б одну штучну змінну у базисі буде суперечливим.

Виведення штучних змінних з базису забезпечується тим, що у вираз функції мети вводяться також ті ж штучні змінні, що і в обмеження задачі, але з досить великим за модулем коефіцієнтом, настільки великим, що наявність штучної змінної в базисі робить неможливим досягнення оптимуму задачі.

Коефіцієнти при штучних змінних у виразі функції мети повинні бути від'ємними у задачах максимізації та додатними у задачах мінімізації функції мети. Конкретного числового значення таким коефіцієнтам не надають, а позначають числом «М», що вважається найбільшим за модулем за усі величини, які входять до задачі.

Задачу з введеними до неї штучними змінними будемо називати ***розширеною (***або ж ***М-задачею).***

Слід зазначити,що після виведення з базису, штучна змінна до нього більше не повертається. Повернення штучної змінної до базису можливе лише у випадках зациклення, яке може інколи спостерігатися у задачах з суперечливою системою умов. Зазначене вище, дає можливість у симплексній таблиці надалі не розглядати колонку, що відповідає штучній змінній, яку виводять з базису, тобто її можна просто викреслити.

Величини Z_j^k індексного $(m+1)$ рядка симплексної таблиці залежатимуть від числа М, причому, якщо на деякому k-му кроці до базису, окрім штучних, входять і основні змінні задачі, то Z_j^k міститиме два доданки, один з яких буде з числом М та коефіцієнтом при ньому, а другий від числа М не залежатиме.

Це дає змогу розділити елементи $Z_j - C_j = Z'_j - C'_j + \lambda_j M$.

Зручно у $(m+1)$ рядку записувати доданок, незалежний від числа М, тобто доданок ($Z'_j - C'_j$), а у $(m+2)$ рядку – доданок, що містить множник М, тобто доданок $\lambda_j M$. Причому для зручності достатньо у рядку $(m+2)$ записувати лише величини λ_j без самого множника М.

Рекомендована схема алгоритму методу штучного базису:

1. Перетворюємо обмеження задачі до обмежень з невід'ємними вільними членами.

2. До правих частин обмежень-нерівностей типу «$\leq$» додаємо додаткові змінні, які і будуть базисними у цих обмеженнях; до правих частин обмежень-рівнянь додаємо штучні базисні змінні; до правих частин обмежень-нерівностей типу «$\geq$» додаємо додаткові змінні та штучні базисні змінні.

3. У вираз функції мети вводимо штучні змінні з коефіцієнтом M, причому зі знаком «-» для задачі максимізації та зі знаком «+» для задач мінімізації цільової функції.

4. Запишемо задачу у симплексну таблицю.

5. Нехай розглядається задача максимізації цільової функції. Проглядаємо $(m+2)$ рядок симплексної таблиці. За розв'язуючий стовпчик візьмемо стовпчик з від'ємним елементом цього рядка (для упорядження – з найменшим від'ємним елементом). Вибирати стовпчик з саме найменшим від'ємним елементом рядка не обов'язково, але часто саме такий вибір приводить до скорочення кроків алгоритму.

6. Складаємо невід'ємні симплексні співвідношення елементів стовпця вільних членів до елементів розв'язуючого стовпця. Знаменник найменшого з них вибираємо за розв'язуючий елемент.

7. Робимо крок Гаусових вилучень у повних таблицях.

8. Якщо розв'язуючий елемент розташований у рядку, де базисною є штучна базисна змінна, то, оскільки з базису вона виводиться, стовпчик, який їй відповідає, викреслюється.

9. Переходимо до пункту 2. Процес продовжується до того моменту, коли у базисі задачі не залишиться штучних змінних. Рядок ($\boldsymbol{m+2}$) міститиме лише елементи, рівні нулю. Тому рядок викреслюють. Опорний план задачі знайдено.

10. Надалі проглядаємо ($\boldsymbol{m+1}$) рядок симплексної таблиці. Якщо у ньому немає від'ємних елементів, то знайдено оптимальний план. Якщо це не так, то за розв'язуючий стовпчик вибираємо стовпчик з від'ємним елементом цього стовпця (для упорядження – з найменшим). Процес продовжується до того моменту, поки рядок ($\boldsymbol{m+1}$) не міститиме від'ємних елементів. Якщо у рядку ще є від'ємні елементи, але хоча б у одному із стовпчиків, що їх містять, немає додатних елементів, то робимо висновок, що функція мети не обмежена зі сторони максимуму («зверху») на множині планів задачі.

Ускладнення. Якщо хоча б один стовпчик симплексної таблиці з від'ємним елементом (для задач максимізації) або додатним елементом (для задач мінімізації) ($\boldsymbol{m+2}$)-го рядка не містить додатних елементів у інших його рядках таблиці (не враховуючи рядок ($\boldsymbol{m+1}$)), то можна зробити висновок, що система умов не сумісна. Про несумісність системи умов задачі свідчить також наступна ситуація: у рядку ($\boldsymbol{m+2}$) для задач максимізації відсутні від'ємні елементи, для задач мінімізації – додатні елементи, але базис задачі ще містить штучні змінні.

Метод штучного базису доцільно використовувати до задач, які містять обмеження-рівняння та обмеження нерівності типу $\geq$ з додатними вільними членами.

Наведемо приклад застосування методу штучного базису.

Приклад 1.

$$\boldsymbol{Z = 3x_1 - x_2 + x_3 \to \max.}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3} \qquad\quad &\boldsymbol{= 5,}\\
\boldsymbol{2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4} &\boldsymbol{= 6,}\\
\boldsymbol{-3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4} &\boldsymbol{\leq 6,}\\
\boldsymbol{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.}
\end{aligned}$$

Зведемо задачу до стандартної постаті.

$$Z = 3x_1 - x_2 + x_3 \to \max.$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 6, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

У третьому обмеженні змінна x_5 – базисна. У 1-му та 2-му обмеженнях базисних змінних немає. Тому введемо до цих обмежень штучні базисні змінні x_6 та x_7. У лінійну форму вводимо ці змінні з від'ємним коефіцієнтом M, оскільки шукаємо максимум цільової функції. Отримаємо наступну задачу.

$$Z = 3x_1 - x_2 + x_3 - Mx_6 - x_7 \to \max.$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 &= 6, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 6, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

Запишемо задачу у симплексну таблицю (табл.1.2.13).

Таблиця 1.2.13

База		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		1
x_i	C_i	3	-1	1	0	0	-M	-M		0
x_6	-M	1	2	1	0	0	1	0	=	5
x_7	-M	2	-4	$\boxed{3}$	1	0	0	1	=	6
x_5	0	-3	3	-1	2	1	0	0	=	6
m+1		-3	1	-1	0	0	0	0	=	6
m+2		-3	2	-4	-1	0	0	0	=	-11

Рядки (m+1) та (m+2) таблиці формуються наступним чином.

Стовпець x_1: $z_1 - c_1 = (-M \times 1 - M \times 2 + 0 \times (-3)) - 3 = -3 - 3M$.

Тому число «-3» записується у рядок (m+1) , і «-3» записується у рядок (m+2).

Стовпець x_2: $z_2 - c_2 = (-M \times 2 - M \times (-4) + 0 \times 3) - (-1) = 1 + 2M$.

У рядок (m+1) записуємо «1», а у рядок (m+2) – «2».

Стовпець x_3: $z_3 - c_3 = (-M \times 1 - M \times 3 + 0 \times (-1)) - 1 = -1 - 4M$.

У рядок (m+1) записуємо «-1», а у рядок (m+2) – «-4».

Для інших стовпців елементи останніх рядків таблиці обчислюються аналогічним чином.

Проглядаємо колонки з від'ємними елементами ($m+2$) рядка. Якби хоча б в одній із них не будо додатних елементів, то можна було б зробити висновок, що система умов не сумісна (ми не можемо вивести штучні змінні з базису). У нашому випадку таких колонок немає.

Найменший від'ємний елемент рядка ($m+2$) розташований у колонці x_3. Тому цю колонку беремо за розв'язуючу. Склавши невід'ємні симплексні відношення вільних членів до елементів розв'язуючої колонки, вибираємо розв'язуючий елемент. Робимо крок Гаусових вилучень у повних Гаусових таблицях, переходимо до нової таблиці (табл.1.2.14).

Таблиця 1.2.14

База		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		1
x_i	C_i	3	-1	0	0	0	-M		0
x_6	-M	1/3	$\boxed{10/3}$	0	-1/3	0	1	=	3
x_3	1	2/3	-4/3	1	1/3	0	0	=	2
x_5	0	--7/3	5/3	0	7/3	1	0	=	8
m+1		-7/3	-1/3	0	1/3	0	0	=	2
m+2		-1/3	-10/3	0	1/3	0	0	=	-3

Єдиний від'ємний елемент ($m+2$) рядка розташований у колонці x_2. Тому саме цю колонку беремо за розв'язуючу. Після перетворень переходимо до нової таблиці.

Елементи останніх двох рядків таблиці можна також обчислювати способом, який використовувався для побудови початкової таблиці. Цю властивість використовують для контролю обчислень, адже елементи обчислені обома способами повинні мати однакові числові значення (табл. 1.2.15).

Таблиця 1.2.15

База		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		1
x_i	C_i	*3*	-1	0	0	0		0
x_2	-1	*1/10*	1	0	-1/10	0	=	9/10
x_3	1	$\boxed{8/10}$	0	1	2/10	0	=	32/1 0
x_5	0	- *25/10*	0	0	25/1 0	1	=	68/1 0
m+1		- *23/10*	0	0	3/10	0	=	23/1 0

Таблиця 1.2.15 не містить колонок зі штучними змінними, а тому немає потреби надалі записувати і $(\boldsymbol{m}+\mathbf{2})$ рядок. Знайдено опорний план задачі.

Ознакою оптимальності плану для задачі максимізації цільової функції є відсутність від'ємних елементів у цільовому рядку $(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})$ за наявності опорного плану. У нашому випадку колонка $\boldsymbol{x}_1$ у цільовому рядку містить від'ємний елемент. Тому беремо цю колонку за розв'язуючу. Проводимо перерахунок елементів і отримуємо таблицю 4 , яка містить оптимальне рішення задачі.

Таблиця 1.2.16

База		$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	$\boldsymbol{x}_3$	$\boldsymbol{x}_4$	$\boldsymbol{x}_5$		1
x_i	C_i	3	-1	0	0	0		0
$\boldsymbol{x}_2$	-1	0	1	-1/8	-1/8	0	=	1/2
$\boldsymbol{x}_1$	3	1	0	10/8	2/8	0	=	4
$\boldsymbol{x}_5$	0	0	0	25/8	25/8	1	=	33/2
m+1		0	0	23/8	7/8	0	=	23/2

Відповідь задачі:

$\boldsymbol{Z}^*_{\max} = \mathbf{23/2;}$

або

$\boldsymbol{X}^*_{\max}\mathbf{(\,4;\ 1/2;\ 0;\ 0;\ 33/2\,).}$

$\boldsymbol{Z}_{\max} = \mathbf{23/2;}$

$\boldsymbol{x}_1^* = \mathbf{4;}\ \ \boldsymbol{x}_2^* = \mathbf{1/2;}\ \ \boldsymbol{x}_3^* = \mathbf{0;}\ \ \boldsymbol{x}_4^* = \mathbf{0;}\ \ \boldsymbol{x}_5^* = \mathbf{33/2.}$

Приклад 2.

$\boldsymbol{Z} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \to \mathbf{min}.$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \mathbf{2}\boldsymbol{x}_3 &\le \mathbf{5},\\ -\boldsymbol{x}_1 \qquad + \boldsymbol{x}_3 &= \mathbf{0},\\ -\mathbf{2}\boldsymbol{x}_2 + \mathbf{3}\boldsymbol{x}_3 &\ge \mathbf{4}, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}_1 \ge \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{x}_2 \ge \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}_3 \ge \mathbf{0}.$

Приведемо задачу до стандартної постаті.

$\boldsymbol{Z} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \to \mathbf{min}.$

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5,\\
&-x_1 + x_3 = 0,\\
&-2x_2 + 3x_3 - x_5 = 4,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 .
\end{aligned}
$$

У першому обмеженні змінна x_4 базисна. У 2-е та 3-є обмеження введемо штучні базисні змінні x_6 і x_7. Оскільки у задачі шукаємо ***min*** цільової функції, то у лінійну форму вводимо ці штучні змінні з додатними множниками ***M***. Одержуємо розширену задачу.

$$Z = 2x_1 + x_2 + \mathrm{M}x_6 + Mx_7 \to \min .$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5,\\
&-x_1 + x_3 + x_6 = 0,\\
&-2x_2 + 3x_3 - x_5 + x_7 = 4,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0 .
\end{aligned}
$$

Запишемо задачу у симплексну таблицю.

Таблиця 1.2.17

База		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		1
x_i	C_i	*2*	1	0	0	0	M	M		0
x_4	0	*1*	-1	2	1	0	0	0	=	5
x_6	M	*-1*	0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	=	0
x_7	M	*0*	-2	3	0	-1	0	1	=	4
m+1		*-2*	-1	0	0	0	0	0	=	0
m+2		*-1*	-2	4	0	0	0	0	=	4

Після виконання двох кроків, отримаємо таблиці, відповідно, 1.2.18 та 1.2.19.

Таблиця 1.2.18

База		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7		1
x_i	C_i	2	1	0	0	0	M		0
x_4	0	3	-1	0	1	0	0	=	5
x_3	0	-1	0	1	0	0	0	=	0
x_7	M	$\boxed{3}$	-2	0	0	-1	1	=	4
m+1		-2	-1	0	0	0	0	=	0
m+2		3	-2	0	0	0	0	=	4

Таблиця 1.2.19

База		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		1
x_i	C_i	2	1	0	0	0		0
x_4	0	0	1	0	1	1	=	1
x_3	0	0	-2/3	1	0	-1/3	=	4/3
x_1	2	1	-2/3	0	0	-1/3	=	4/3
m+1		0	-7/3	0	0	-2/3	=	8/3

Остання таблиця дає оптимальне рішення задачі.

Відповідь:

$\boldsymbol{Z^*_{\min} = 8/3;}$

$\boldsymbol{X^*_{\min}(4/3;\ 0;\ 4/3;\ 1;\ 0).}$ або

$\boldsymbol{Z^*_{\min} = 8/3;}$

$\boldsymbol{x^*_1 = 4/3;\ x^*_2 = 0;\ x^*_3 = 4/3;\ x^*_4 = 1;\ x^*_5 = 0.}$

1.3. ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу, пов'язану певним чином з початковою задачею. Такі задачі називають ***двоїстими***, або ***спряженими***. Спільний розгляд двоїстих пар задач дуже важливий в економічному аналізі оптимального плану. Відповідність між вихідною та двоїстою задачами полягає в побудові на основі першої задачі двоїстої до неї (вихідною може розглядатися будь-яка зі спряженої пари задач).

Економічну інтерпретацію пари двоїстих задач розглянемо на прикладі задачі оптимізації використання виробничих ресурсів. Припустимо, що деяка фірма має m видів виробничих ресурсів у кількості b_i для виробництва n видів продукції. Знаючи технологічні витрати a_{ij} кожного виду ресурсу на виробництво одиниці кожного виду продукції та прибуток c_j від реалізації кожного товару, задача зводиться до знаходження такого плану виробництва продукції кожного виду x_j, який би максимізував загальний прибуток. Задача має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.3.1}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо дещо іншу задачу. Припустимо, що є підприємство, яке бажає купити для своїх потреб у фірми її ресурси, маючи на це кошти.

Постає питання про ціни (цінність) ресурсів, за якими фірма погодилася б продати ресурси, а підприємству було б вигідно їх придбати. Але мова йдеться не про ринкові ціни на ресурси, а лише про оцінку наявних ресурсів з точки зору сподіваних прибутків від їх використання, і тому зрозуміло, що вони будуть залежати від прибутків c_j (чим більші прибутки, тим дорожчими будуть наявні ресурси).

Якщо позначити ціну одиниці відповідного ресурсу за u_i, то задача для підприємства зводиться до мінімізації витрат на придбання ресурсів кожного виду. Але фірма погодиться на продаж ресурсів за умови, що сума, одержана від реалізації ресурсів, які можна витратити на виготовлення продукції, буде не меншою, ніж сума очікуваного прибутку, одержаного при виробництві продукції. Така задача має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \to min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n}; \tag{1.3.2}$$

$$u_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,m}.$$

Задача (1.3.2) називається ***двоїстою***, або ***спряженою*** до задачі (1.3.1), яку називатимемо ***прямою***, вихідною чи просто заданою задачею щодо задачі (1.3.2).

Зв'язок вихідної та двоїстої задач полягає, насамперед, у тому, що розв'язок однієї з них можна отримати безпосередньо з розв'язку іншої.

Математичний апарат лінійного програмування дозволяє за допомогою обчислювальних процедур не тільки отримати оптимальний план, але й зробити ряд економічних змістовних висновків, що базуються на властивостях подвійної задачі.

Кожна з пари подвійних задач фактично є самостійною задачею лінійного програмування і може розв'язуватися незалежно.

Розглянемо ***правила побудови двоїстої задачі***.

1. Кожному $\boldsymbol{i}$-му обмеженню вихідної задачі відповідає змінна $\mathbf{u}_i$ двоїстої задачі; і навпаки, кожному $\boldsymbol{j}$-му обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна $\boldsymbol{x_j}$ вихідної задачі.

2. Якщо одна з пари двоїстих задач сформульована на максимум цільової функції, то друга – на мінімум і навпаки.

3. Обмеження-нерівності слід записувати зі знаком "≥" – при мінімізації цільової функції і "≤" – при максимізації.

4. Коефіцієнти цільової функції однієї із задач є вільними членами системи обмежень другої задачі.

5. Матриці, складені з коефіцієнтів обмежень вихідної і двоїстої задач, є взаємно транспонованими.

Принцип двоїстості

Оптимальні розв'язки пари двоїстих задач тісно пов'язані між собою.

Перша (основна)теорема двоїстості:

1.Якщо одна зі спряжених задач має оптимальний план, то його має й друга задача, причому значення цільових функцій збігаються, тобто

$$\boldsymbol{Z}(\max) = \boldsymbol{F}(\min).$$

2.Якщо одна із пари спряжених задач має цільову функцію, не обмежену на множині своїх планів, то подвійна їй задача має суперечливу систему умов;

3.Якщо одна з пари спряжених задач має суперечливу систему умов, то друга або має необмежену цільову функцію на множині своїх планів, або також суперечлива.

Для формулювання другої теореми двоїстості попередньо сформулюємо теорему про критерій оптимальності планів пари двоїстих задач :

Для оптимальності деяких двох планів прямої $x'(x_1', x_2',\ldots,x_n')$ та спряженої задачі $u'(u_1',u_2',\ldots,u_m')$ необхідно і достатньо, щоб ці плани надавали цільовим функціям двох задач однакових за величиною значень:

$$Z(x')=c_1x_1'+c_2x_2'+\ldots+c_nx_n'=b_1u_1'+b_2u_2'+\ldots+b_mu_m'=F(u').$$

Оптимальні плани двох задач пов'язані не лише рівністю значень цільових функцій, у них дотримуються й інші важливі співвідношення, що витікають із теореми рівноваги.

Сформулюємо ***другу теорему двоїстості***: для того, щоб два допустимих плани пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли ***умови доповнюючої нежорсткості:***

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,u_i - c_j\right)=0, \qquad (j=\overline{1,n}); \tag{1.3.3}$$

$$u_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j - b_i\right)=0, \qquad (i=\overline{1,m}). \tag{1.3.4}$$

Звідси можна зробити важливі, з точки зору економічного аналізу, висновки:

а) якщо $x_j > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,u_i = c_j$; (1.3.5)

б) якщо $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,u_i > c_j$ то $x_j = 0$; (1.3.6) в) якщо $u_i > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j$; (1.3.7)

г) якщо $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$ то $u_i = 0$. (1.3.8)

Інше формулювання другої теореми двоїстості: два плани пари двоїстих задач лінійного програмування тоді і лише тоді будуть оптимальними (розв’язками відповідних задач), коли всім відмінним від нуля компонентам плану кожної задачі відповідають обмеження спряженої задачі, які виконуються, як строгі рівності, а всім обмеженням кожної задачі, що виконуються як строгі нерівності, відповідають змінні спряженої задачі, які обов’язково дорівнюють нулю.

Із умов (1.3.5 – 1.3.6) випливає, що якщо j -й вид продукції увійшов в оптимальний план, тобто $x_j > 0$, то він в оптимальних оцінках не збитковий; якщо ж j-*й* вид продукції збитковий, то він не увійде в план, тобто не буде вироблятися, тобто матимемо $x_j = 0$.

Умови (1.3.7 – 1.3.8) можна інтерпретувати так: якщо оцінка одиниці ресурсу додатна, тобто $u_i > 0$, то при оптимальній виробничій програмі i-й ресурс використовується повністю, якщо ж i-й ресурс використовується не повністю, то його оцінка рівна нулю, $u_i = 0$.

Отже, двоїсті оцінки є показником дефіцитності ресурсів. Величина u_i^* є оцінкою i-го ресурсу. Чим більше значення оцінки u_i^*,тим вище дефіцитність ресурсу. Для недефіцитного ресурсу $u_i^* = 0$.

У той же час двоїсті оцінки u_i^* показують приріст цільової функції, який зумовлюється зміною на одиницю вільного члена i-го обмеження.

Розв'язуючи вихідну задачу симплексним методом, в останній симплексній таблиці одержуємо значення компонентів оптимального плану вихідної та двоїстої задач.

Покажемо розв’язок подвійної задачі на прикладі розв’язку прямої.

Нехай пряма задача має вигляд (див. задачу 1.2.1).

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow max,$$

$$\begin{aligned}&2x_1 + 5x_2 \le 20,\\ &8x_1 + 5x_2 \le 40,\\ &5x_1 + 6x_2 \le 30,\\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

До цієї задачі необхідно побудувати двоїсту та знайти оптимальний розв’язок задач.

Введемо три змінні u_1 , u_2 , u_3 , які відповідають обмеженням прямої задачі і запишемо двоїсту задачу:

$$\begin{aligned}&F = 20u_1 + 40u_2 + 30u_3 \to min,\\ &2u_1 + 8u_2 + 5u_3 \ge 50,\\ &5u_1 + 5u_2 + 6u_3 \ge 40,\\ &u_1 \ge 0; \quad u_2 \ge 0; \quad u_3 \ge 0.\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Пряма задача у стандартному вигляді запишеться так:

$$\begin{aligned}&Z = 50x_1 + 40x_2 \to max,\\ &2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20,\\ &8x_1 + 5x_2 + x_4 = 40,\\ &5x_1 + 6x_2 + x_5 = 30,\\ &x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5}).\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Або, виразивши залежні змінні через незалежні, одержимо:

$$\begin{aligned}&Z = 50x_1 + 40x_2 \to max,\\ &x_3 = -2x_1 - 5x_2 + 20,\\ &x_4 = -8x_1 - 5x_2 + 40,\\ &x_5 = -5x_1 - 6x_2 + 30,\\ &x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,5}).\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Внесемо цю умову задачі в табл. 1.3.1 (див.також табл.1.2.3).

Таблиця 1.3.1

Базис	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3=$	2	5	20
$x_4=$	8	5	40
$x_5=$	5	6	30
$Z=$	-50	-40	0

Двоїста задача в стандартному виді матиме вигляд:

$$\begin{aligned} &F = 20u_1 + 40u_2 + 30u_3 \to min, \\ &2u_1 + 8u_2 + 5u_3 - u_4 \qquad = 50, \\ &5u_1 + 5u_2 + 6u_3 \qquad - u_5 = 40, \\ &u_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,5}). \end{aligned} \qquad (1.3.13)$$

Або, виразивши залежні змінні через незалежні:

$$\begin{aligned} &F = 20u_1 + 40u_2 + 30u_3 \to min, \\ &u_4 = 2u_1 + 8u_2 + 5u_3 - 50, \\ &u_5 = 5u_1 + 5u_2 + 6u_3 - 40, \\ &u_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,5}). \end{aligned} \qquad (1.3.14)$$

Пару спряжених задач можна записати в одну таблицю, приймаючи до уваги відповідність між змінними обох задач (табл.1.3.2):

Таблиця 1.3.2

	Базис	$u_4=$ $-x_1$	$u_5=$ $-x_2$	$F=$ 1
u_1	$x_3=$	2	5	20
u_2	$x_4=$	$\boxed{8}$	5	40
u_3	$x_5=$	5	6	30
1	$Z=$	-50	-40	0

Розв'язуючи пряму задачу симплексним методом, одночасно отримуємо розв'язок двоїстої (табл. 1.3.3, 1.3.4).

Таблиця 1.3.3

	Базис	$u_2=$ $-x_4$	$u_5=$ $-x_2$	$F=$ 1
u_1	$x_3=$	-0,25	3,75	10
u_4	$x_1=$	0,13	0,63	5
u_3	$x_5=$	-0,63	$\boxed{2,88}$	5
1	$Z=$	6,25	-8,75	250

Таблиця 1.3.4

	Базис	u_2= -x_4	u_3= -x_5	F= 1
u_1	x_3=	0,57	-1,30	3,48
u_4	x_1=	0,26	-0,22	3,91
u_5	x_2=	-0,22	0,35	1,74
1	Z=	5,04	3,04	265,10

Виписуємо розв'язок прямої задачі з останньої симплексної таблиці:

$$x_1^* = 3{,}91, \quad x_2^* = 1{,}74, \quad x_3^* = 3{,}48, \quad x_4^* = 0, \quad x_5^* = 0;$$

$$Z_{max}^* = 265{,}10.$$

З цієї ж таблиці виписуємо розв'язок двоїстої задачі:

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 5{,}04, \quad u_3^* = 3{,}04, \quad u_4^* = 0, \quad u_5^* = 0;$$

$$F_{min}^* = 265{,}10.$$

Аналіз оптимального розв'язку задач лінійного програмування

Наведені теореми подвійності дозволяють використовувати розв'язок подвійної задачі (подвійні оцінки, об'єктивно зумовлені оцінки) для аналізу оптимального плану прямої задачі. Так, якщо значення подвійної оцінки відмінне від нуля – це означає, що виробничий ресурс є лімітованим, обмежує подальше нарощування виробництва, причому – чим більше значення набуває подвійна оцінка, тим більш лімітованим є ресурс.

Якщо ж значення подвійної оцінки нульове, то це означає, що відповідний їй виробничий ресурс є надлишковим, тобто наявна його кількість не стримує розвиток виробництва та нема необхідності для підприємства залучати додаткову кількість цього ресурсу до виробничого процесу, так як на результати виробництва та нарощування його обсягів це не вплине.

Розглянемо детальніше ненульові значення подвійних оцінок. Їх величина вказує на значущість виробничого ресурсу для підприємства з позицій його розширення та зміни результатів виробничої діяльності при незначній зміні оптимального плану по однорідному виду продукції в межах незначної зміни обсягу виробничого ресурсу. Іншими словами, величина подвійної оцінки показує, як зміниться (збільшиться/зменшиться) значення цільової функції прямої задачі при збільшенні/(зменшенні) виробничого ресурсу на одну одиницю за умови оптимального використання цієї додаткової одиниці ресурсу.

Для оптимізації використання додатково залученої до виробничого процесу одиниці певного виробничого ресурсу має бути зміненим оптимальний план (розв'язок) прямої задачі. Напрям змін оптимального плану прямої задачі вказують коефіцієнти заміщення останньої симплексної таблиці.

Таким чином, оптимальний розв'язок прямої та двоїстої задач, що міститься в останній симплексній таблиці (значення змінних прямої задачі, значення змінних двоїстої задачі, коефіцієнти заміщення) – це та інформація, що дозволяє отримати відповіді на ряд важливих для економістів питань, серед яких:

1.Яку виробничу структуру повинен мати виробничий процес для досягнення найбільшої його ефективності?

2.Якою величиною характеризується найвища економічна ефективність виробничого процесу (оптимальне значення цільової функції?

3.Як використовуються виробничі ресурси при оптимальному їх використанні, тобто які з ресурсів використовуються повністю, які залишаються невикористаними і в якій кількості?

4.Який з виробничих ресурсів найбільше стримує розвиток виробництва, тобто які пріоритети мають виробничі ресурси з точки зору їх впливу на величину цільової функції при додатковому їх залученні до виробничого процесу;

5.На скільки може змінитися (збільшитися) значення цільової функції при додатковому залученні одиниці обмеженого (лімітованого) ресурсу за умови його оптимального використання?

6.Як змінити оптимальний план прямої задачі для оптимального використання додатково залученої одиниці виробничого ресурсу?

Деякі додатки лінійного програмування

Лінійне програмування виникло виходячи із практичних потреб та знаходить застосування при вирішенні широкого класу різних економічних задач. Розглянемо постановку та рішення деяких з них.

Задача про використання ресурсів

Підприємство має $\boldsymbol{m}$ видів ресурсів відповідно в кількостях $\boldsymbol{b_i}$ одиниць, $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, m,}$ із яких виробляється $\boldsymbol{n}$ видів продукції.

Відомо, що $\boldsymbol{a_{ij}}$ це кількість одиниць $\boldsymbol{i}$-го ресурсу, яка необхідна для виробництва одиниці $\boldsymbol{j}$-ої продукції, $\boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, n.}$ При реалізації $\boldsymbol{j}$-ої продукції підприємство отримує $\boldsymbol{c_j}$ одиниць доходу.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, при якому дохід підприємства від реалізації всієї продукції був би максимальним.

Якщо через $\boldsymbol{x_j}$ позначити кількість одиниць $\boldsymbol{j}$-ої продукції, яку треба випустити, то задача математично формулюється наступним чином.

Знайти максимум лінійної форми:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,$$

$$x_j \ge 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Задача про суміш

Денна дієта має містити $\boldsymbol{m}$ різних поживних речовин відповідно в кількостях не менше $\boldsymbol{b_i}$ одиниць, $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, m.}$ Маємо $\boldsymbol{n}$ різних продуктів.

Нехай $\boldsymbol{a_{ij}}$ – кількість одиниць $\boldsymbol{i}$-ої поживної речовини, що міститься в одиниці $\boldsymbol{j}$-го продукту, $\boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, n;}$

$\boldsymbol{c_j}$ – вартість одиниці $\boldsymbol{j}$-го продукту;

$\boldsymbol{d_j}$ – кількість одиниць $\boldsymbol{j}$-го продукту, який є в наявності.

Визначити таку дієту, яка задовольняла б мінімальну денну потребу в кожній поживній речовині при найменшій загальній вартості продуктів, які використовуються.

Якщо позначити через x_j кількість одиниць j-го продукту, який входить до дієти, то задача математично формулюється наступним чином.

Знайти мінімум лінійної форми:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i ,$$

$$0 \leq x \leq d_j, \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Подібною до задачі про суміш є задача про раціон.

1.4. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Економічно постановку транспортної задачі лінійного програмування можна інтерпретувати так: від деяких постачальників необхідно перевезти певну кількість однорідного вантажу певним споживачам. Відомо, скільки вантажу є у кожного постачальника та потреба в ньому кожного споживача.

Відстань (або інші економічні оцінки, наприклад, затрати на перевезення одиниці вантажу) від кожного постачальника до кожного споживача відомі. Необхідно визначити, яку кількість вантажу необхідно перевезти і за яким маршрутом (тобто від якого постачальника і якому споживачу), щоб від постачальників був вивезений весь вантаж і кожен споживач отримав необхідну кількість вантажу, а загальні затрати на транспортування всього вантажу були б мінімальними.

Математична постановка задачі така: маємо m постачальників (пунктів відправлення вантажу) і n споживачів (пунктів призначення вантажу).

Нехай:

i – індекс постачальника ($i = 1, 2, \ldots, m$);

j – індекс споживача ($j = 1, 2, \ldots, n$);

a_i – кількість вантажу, що є у ***i***-го постачальника;

b_j – кількість вантажу, необхідного ***j***-му споживачу;

x_{ij} – шукана величина перевезень вантажу від ***i***-го постачальника до ***j***-го споживача;

c_{ij} – відстань (або затрати) перевезень одиниці вантажу від ***i***-го постачальника до ***j***-го споживача (коефіцієнти цільової функції задачі).

Виходячи з прийнятих позначень, економіко-математична модель задачі в структурній формі запишеться так.

Знайти:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min \qquad (1.4.1)$$

при умовах:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (1.4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (1.4.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (1.4.4)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (1.4.5)$$

Величина ***Z*** характеризує мінімальне значення затрат на транспортування всього вантажу.

Умова (1.4.2) показує, що, до яких би пунктів призначення не перевозився вантаж, кількість вантажу, перевезеного від ***i***-го постачальника повинна дорівнювати його наявності у цього постачальника.

Умова (1.4.3) означає, що загальний обсяг вантажу, з яких би пунктів він не відправлявся, в сумі обов'язково повинен задовольняти потребу в ньому ***j***-го споживача.

Умова (1.4.4) (***балансова***) показує, що сумарна кількість вантажу, що отримують споживачі, повинна дорівнювати сумарній наявності вантажу у постачальників.

Задача називається ***закритою***, якщо балансова умова виконується. Задача вважається ***відкритою***, якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (1.4.6)$$

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є виконання балансової умови. Щоб розв’язати відкриту задачу, її необхідно звести до закритої шляхом введення додаткового фіктивного споживача або постачальника.

Умова (1.4.5) показує, що кількість перевезеного вантажу від будь-якого постачальника будь-якому споживачу не може бути від’ємною.

Інформація до транспортної задачі може бути подана:

а) у векторно-матричній формі, наприклад:

вектор запасів:

$A = (a_1 , a_2 \ldots a_m)$;

вектор потреб:

$B = (b_1 , b_2 \ldots b_n)$;

матриця тарифів:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ - & - & - & - \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

б) у вигляді ***розподільчої*** таблиці (табл.1.4.1). Для задач невеликої розмірності ця форма найбільш зручна.

Таблиця 1.4.1

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреба	b_1	b_2	…	b_n	$a_i = b_j$ чи $a_i \neq b_j$

Транспортна задача – різновид задачі лінійного програмування. Розв'язок транспортної задачі проходить у два етапи.

На першому етапі знаходять ***опорний план***, тобто будь-який розв'язок. Для цього використовують методи:

- діагональний (або метод північно-західного кута);
- мінімальної вартості;
- подвійних відміток;
- диференціальних рент та інші.

На другому – знаходять ***оптимальний план***, для цього знайдений опорний план перевіряють на ***оптимальність*** методами:

- потенціалів;
- розподільчим.

Розглянемо розв'язок транспортної задачі на прикладі.

Задача 1.4.1. Нехай необхідно скласти такий план транспортування комбікормів від чотирьох заводів до чотирьох господарств, щоб господарства отримали необхідну кількість комбікорму, а загальні витрати на перевезення були мінімальні.

Інформація до задачі представлена у векторно-матричній формі.

Вектор запасів:

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{100, 90, 50, 60}).$$

Вектор потреб:

$$\boldsymbol{B} = (\mathbf{65, 80, 105, 50}).$$

Матриця тарифів:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{15} & \mathbf{5} & \mathbf{20} \\ \mathbf{20} & \mathbf{10} & \mathbf{15} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{15} & \mathbf{20} & \mathbf{5} \\ \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{5} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

Для того, щоб задача мала розв'язок, необхідно щоб виконувалась балансова умова. Перевіряємо виконання балансової умови (1.4.4):

$100 + 90 + 50 + 60 = 65 + 80 + 105 + 50 = 300.$

Отже задача закритого типу.

Представимо задачу у вигляді розподільчої таблиці (табл. 1.4.2):

Таблиця 1.4.2

Пункти відправ-лення	Пункти споживання				Запаси
	***B*₁**	***B*₂**	***B*₃**	***B*₄**	
***A*₁**	**10**	**15**	**5**	**20**	**100**
***A*₂**	**20**	**10**	**15**	**5**	**90**
***A*₃**	**5**	**15**	**20**	**5**	**50**
***A*₄**	**10**	**20**	**5**	**10**	**60**
Потреба	**65**	**80**	**105**	**50**	**300**

У правих верхніх кутах клітин розподільчої таблиці проставлені затрати на перевезення одиниці (наприклад 1т) комбікорму.

Наприклад, у клітині **(a_1, b_1)** стоїть оцінка 10, яка показує, що витрати на перевезення 1т комбікормів від першого заводу до першого господарства становлять 10 грошових одиниць. В останньому рядку таблиці показані величини, що характеризують потребу господарств у комбікормах, а в останньому правому стовпчику – відповідні величини, що характеризують можливості заводів щодо постачання комбікормів (у тоннах).

Знайдемо опорний розв’язок транспортної задачі методом ***північно-західного кута (діагональним методом).*** Для реалізації цього методу потрібно знати лише вектори запасів та потреб:

$$A = (a_1, a_2, ..., a_m);$$
$$B = (b_1, b_2, ..., b_n).$$

На кожному кроці заповнюється діагональна клітина, тобто клітина лівого верхнього кута незаповненої частини таблиці. Спосіб заповнення таблиці такий:

$$x_{11} = min(a_1; b_1) = min(100; 65) = 65,$$
$$x_{12} = min(a_1 - x_{11}; b_2) = min(100 - 65; 80) = 35,$$
$$x_{13} = x_{14} = x_{21} = 0,$$

$$x_{22} = min(a_2; b_2 - x_{12}) = min(90; 80 - 35) = 45$$

і таким чином заповнюємо інші клітини таблиці. При цьому утворюється умовна діагональ із заповнених клітин.

Одержані значення змінних запишемо в таблицю (табл. 1.4.3), що і дасть початковий опорний план.

Таблиця 1.4.3

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	**10** / **65**	**15** / **35**	**5**	**20**	**100**
A_2	**20**	**10** / **45**	**15** / **45**	**5**	**90**
A_3	**5**	**15**	**20** / **50**	**5**	**50**
A_4	**10**	**20**	**5** / **10**	**10** / **50**	**60**
Потреба	**65**	**80**	**105**	**50**	**300**

Значення цільової функції для знайденого плану (розв'язку) обчислюється як сума добутків тарифів на перевезення (затрат) на кількість одиниць вантажу, що перевозиться за цим тарифом. Отже

$\boldsymbol{Z}$=10•65+15•35+10•45+15•45+20•50+5•10+10•50=3850.

Проте при знаходженні опорного плану діагональним методом не беруться до уваги тарифи на перевезення, тому ефективніше використовувати методи: мінімальної вартості, подвійних відміток, диференціальних рент та інші.

Знайдемо опорний план для задачі 1.4.1 методом ***мінімальної вартості***. Для цього в першу чергу заповнюємо клітини з найменшими значеннями тарифів, наприклад клітину (a_1, b_3). В інших клітинах по рядку або стовпчику, куди не потрібно завозити вантаж, ставимо прочерки, щоб виключити їх з подальших розрахунків. Кількість вантажу, яка записується в клітину, визначається аналогічно діагональному методу. В результаті таких дій отримуємо таблицю (табл. 1.4.4):

Таблиця 1.4.4

Пункти відправ-лення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	15	5 100	20	100
A_2	20	10 40	15	5 50	90
A_3	5 50	15	20	5	50
A_4	10 15	20 40	5 5	10	60
Потреба	65	80	105	50	300

План транспортної задачі є ***невиродженим***, якщо число відмінних від нуля елементів матриці плану (базисних клітин) дорівнює

$$r = m + n - 1, \qquad (1.4.7)$$

де m – кількість рядків (постачальників), а n – кількість колонок (споживачів).

У випадку ***виродженості*** плану до сукупності базисних (ненульових) клітин таблиці додається небазисна (нульова) клітина, але так, щоб вона не утворювала циклу з сукупністю базисних клітин таблиці. Надалі цю клітину вважатимемо заповненою нулем.

У нашому випадку кількість заповнених клітин згідно з (1.4.7) :

$r = 4 + 4 – 1 = 7$, отже план невироджений.

Переходимо до ***другого етапу*** розв’язку.

На цьому етапі перевіримо знайдений методом мінімальної вартості опорний план на оптимальність. Для цього використаємо ***метод потенціалів.***

Ідея методу потенціалів полягає в тому, що постачальникам a_i ставляться у відповідність числа u_i, а споживачам b_j – числа v_j, які можуть приймати будь-які значення. Числа u_i та v_j називаються потенціалами. Вони мають дві важливі властивості:

1) сума потенціалів заповнених клітин дорівнює тарифу клітини

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad (x_{ij} \geq 0); \tag{1.4.8}$$

2) сума потенціалів вільних клітин в оптимальному плані не перевищує тарифу клітини

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \qquad (x_{ij} = 0). \tag{1.4.9}$$

Перша властивість потенціалів дає змогу обчислити їх числові значення. За допомогою другої властивості потенціалів план перевіряється на оптимальність.

Отже, план транспортної задачі буде оптимальним, якщо виконуються дві умови потенціальності.

Знайдемо потенціали (за першою умовою потенціальності) для нашої задачі. Для цього розв'яжемо такі рівняння:

$$\begin{aligned} &u_1 + v_3 = 5, \\ &u_2 + v_2 = 10, \\ &u_2 + v_4 = 5, \\ &u_3 + v_1 = 5, \\ &u_4 + v_1 = 10, \\ &u_4 + v_2 = 20, \\ &u_4 + v_3 = 5. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Ця система містить 7 рівнянь та 8 невідомих і є неозначеною, тобто має безліч розв'язків. Нехай один із потенціалів (бажано потенціал того рядка чи колонки, що містить найбільшу кількість заповнених клітин) дорівнює 0, наприклад нехай $u_4 = 0$.

Тоді, шляхом підстановки у систему (1.4.10) $u_4 = 0$ отримаємо:

$$\begin{aligned} &u_1 = 0; u_2 = -10; u_3 = -5; u_4 = 0; \\ &v_1 = 10; v_2 = 20; v_3 = 5; v_4 = 15. \end{aligned}$$

Таблицю 1.4.4 доповнимо колонкою u_i та рядком v_j, куди і впишемо одержані потенціали (табл.1.4.5).

Таблиця 1.4.5

Пункти відправ-лення	Пункти споживання				Запа-си	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	10	15	5 100	20	**100**	0
A_2	20	10 40 +	15	5 - 50	**90**	-10
A_3	5 50 -	15	20	5 +	**50**	-5
A_4	10 15 +	20 40 -	5 5	10	**60**	0
Потреба	**65**	**80**	**105**	**50**	**300**	
v_j	10	20	5	15		

Перевіримо, чи виконується умова (1.4.9) для небазисних клітин таблиці:

$$\boldsymbol{u_1 + v_1 = 0 + 10 = 10 = 10,}$$
$$\boldsymbol{u_1 + v_2 = 0 + 20 = 20 > 15,}$$
$$\boldsymbol{u_1 + v_4 = 0 + 15 = 15 < 20,}$$
$$\boldsymbol{u_2 + v_1 = -10 + 10 = 0 < 20,}$$
$$\boldsymbol{u_2 + v_3 = -10 + 5 = -5 < 15,}$$
$$\boldsymbol{u_3 + v_2 = -5 + 20 = 15 = 15,}$$
$$\boldsymbol{u_3 + v_3 = -5 + 5 = 0 < 20,}$$
$$\boldsymbol{u_3 + v_4 = -5 + 15 = 10 > 5,}$$
$$\boldsymbol{u_4 + v_4 = 0 + 15 = 15 > 10.}$$

Умова потенціальності порушена у клітинах ($\boldsymbol{u_1}$; $\boldsymbol{v_2}$), ($\boldsymbol{u_3}$; $\boldsymbol{v_4}$), ($\boldsymbol{u_4}$; $\boldsymbol{v_4}$).

Якщо такі порушення є більше ніж в одній клітині, то вибирають ту з них, для якої умова найбільше порушена, тобто

$$\max\left\{\Delta_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right)\right\}. \qquad (1.4.11)$$

Для нашої задачі – це всі три клітини ($\boldsymbol{u_1}$; $\boldsymbol{v_2}$), ($\boldsymbol{u_3}$; $\boldsymbol{v_4}$) або ($\boldsymbol{u_4}$; $\boldsymbol{v_4}$).

Якщо умова (1.4.11) однакова для декількох клітин, вибирають ту, в якої менший тариф, у нашому випадку (u_3 ; v_4).

Вибрану клітину позначимо знаком "+", тим самим визначимо першу клітину циклу транспортної задачі.

Введемо деякі означення.

Ланцюгом транспортної таблиці називається послідовність клітин таблиці, яка задовольняє умову: кожна пара клітин міститься або в одному рядку, або в одній колонці таблиці.

Ланцюг можна записати так:

$$(i_1, j_1) - (i_1, j_2) - (i_2, j_2) - (i_2, j_3) - \ldots - (i_k, j_r)$$

або

$$(i_1, j_1) - (i_2, j_1) - (i_2, j_2) - (i_3, j_2) - \ldots - (i_k, j_r).$$

Ланцюг, у якого збігаються перша та остання клітини, називається ***циклом***.

Ланцюг, що не утворює циклу, називається ***ациклічним***.

Щоб побудувати новий опорний план, ближчий до оптимального, необхідно виконати ряд кроків.

1. Будуємо цикл для клітини, в якій умова потенціальності (1.4.9) порушена. Для нашої задачі цикл становлять клітини: (u_3 ;v_4), (u_3 ;v_1), (u_4 ;v_1), (u_4 ;v_2), (u_2 ;v_2), (u_2 ;v_4).

2. Клітини циклу транспортної задачі почергово позначають знаками плюс “+” і мінус “–“, починаючи з тої, для якої будуватимемо цикл.

3. Серед елементів циклу транспортної задачі, які позначені мінусом “–“, треба вибрати найменший. Для нашої задачі $\theta = min(50; 50; 40) = 40$.

4. Переходимо до наступної таблиці за правилом:

- якщо елемент таблиці не ввійшов у цикл транспортної задачі, то у наступну таблицю він переноситься без змін;
- якщо елемент таблиці ввійшов у цикл транспортної задачі з позначкою плюс “+”, то у наступній таблиці він буде збільшений на θ.
- якщо елемент таблиці ввійшов у цикл транспортної задачі із позначкою мінус “–“, то у наступній таблиці він буде зменшеним на θ.

У результаті перерозподілу отримали новий опорний план (табл.1.4.6), який знову перевіряємо на оптимальність методом потенціалів.

Таблиця 1.4.6

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси	u_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	**10**	**15**	**5** **100**	**20**	**100**	10
A_2	**20**	**10** **80**	**15**	**5** **10**	**90**	5
A_3	**5** **10**	**15**	**20**	**5** **40**	**50**	5
A_4	**10** **55**	**20**	**5** **5**	**10**	**60**	10
Потреба	**65**	**80**	**105**	**50**	**300**	
v_j	0	5	-5	0		

Умови потенціальності для табл.1.4.6 виконуються, що свідчить про оптимальність плану перевезень, якому відповідає найменша загальна вартість перевезень, тобто

Z_{min}=5•100+10•80+5•10+5•10+5•40+10•55+5•5=2175,

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & 40 \\ 55 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

або

$$x_{13} = 100;\ x_{22} = 80;\ x_{24} = 10;\ x_{31} = 10;\ x_{34} = 40;\ x_{41} = 55;\ x_{43} = 5.$$

1.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У практиці планування та управління економікою часто зустрічаються задачі з вимогою цілочисельності усіх, або окремих змінних.

Такі задачі відносяться до класу дискретних задач, підкласу – цілочислових або частково цілочислових.

До цілочислових задач можна віднести задачі транспортного типу, задачі на розкрій матеріалу, розподілу обладнання, обороту стада сільськогосподарських тварин.

Типовою цілочисловою задачею є задача про перевезення вантажу, який не можна поділити, яка може бути сформульована таким чином. У деякому транспортному засобі є $\boldsymbol{m}$ відсіків, обладнаних для перевезення n видів вантажу. Відома місткість кожного відсіку $\boldsymbol{b_i}$. При цьому $\boldsymbol{j}$-й $(j=1,2,\ldots,n)$ вид вантажу характеризується такими якостями, як: 1) неподільність, тобто вантаж може вибиратись у кількості x_j, кратній одиниці; 2) корисністю одиниці вантажу (наприклад, ціною) c_j, величиною зайнятості i-го відсіку одиницею цього вантажу a_{ij}.

Необхідно знайти такий склад вантажу для перевезення, який би давав можливість отримати максимальну корисність від перевезень, тобто задача зводиться до відшукання плану перевезень $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ для завантаження транспортного засобу, який забезпечує максимальну корисність рейсу, тобто максимізує функцію мети:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad \text{за таких обмежень :}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_j \ - \ \text{цілі числа.}$$

Класичним прикладом задачі цілочислового програмування є ***задача про комівояжера***. Комівояжер має побувати у певній заданій кількості міст, віддалі між якими відомі. Комівояжер повинен розпочати маршрут у своєму місті, побувати у кожному місті один раз і повернутися назад додому. Вибраний ним маршрут повинен бути найкоротшим з усіх можливих маршрутів.

Задачі цілочислового програмування можуть бути як лінійними, так і нелінійними, статичними або динамічними, детермінованими чи стохастичними і т.д. Розглянемо лінійну детерміновану статичну задачу з цілочисловими умовами, накладеними на змінні задачі.

У загальному випадку задачу лінійного цілочислового програмування можна сформулювати наступним чином: знайти план $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, що надає екстремального значення цільовій функції:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr\,(\max, \min) \qquad (1.5.1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =\ge\} a_{i0} \quad (i = 1, 2, ..., m), \qquad (1.5.2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, ..., n), \qquad (1.5.3)$$

$$x_j - \text{цілі числа.} \qquad (1.5.4)$$

Для розв’язування цілочислових задач не можуть бути застосовані безпосередньо методи відшукання розв’язків лінійних задач математичного програмування. Далі розглянемо методи розв’язування цілочислових задач.

Коротка характеристика методів розв’язку задач цілочислового програмування

Задача цілочислового програмування відрізняється від задачі лінійного програмування лише умовою (1.5.4). Розв’язавши задачу (1.5.1) – (1.5.3) симплексним методом можна отримати план, який рідко задовольняє умови цілочисельності. Округливши отримані оптимальні значення змінних величин до цілих чисел, по-перше, можна отримати точку, що не належить області допустимих значень, або, по-друге, точку, яка не є оптимальною для цілочислової задачі.

Такий підхід можливий хіба що у випадку, коли значення змінних, що утворюють оптимальний план, мають велику розмірність, і їх округлення не призводить до великих похибок. Тому задачі з умовою цілочисельності змінних часто потребують особливих методів розв’язування.

Методи цілочислової оптимізації можна розділити на три основні групи: методи відсікання (відтинання), комбінаторні методи і наближені методи.

Суть методів ***відсікання*** полягає в тому, що спочатку цілочислова задача розв’язується з так званими ***послабленими обмеженнями,*** тобто без врахування умов цілочисельності змінних.

Якщо отриманий план цілочисловий, то задача розв’язана. У протилежному випадку до обмежень задачі поступово вводять спеціальні додаткові обмеження, що враховують цілочисловість змінних, при цьому многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшується доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

Кожне додаткове обмеження має відповідати наступним вимогам: 1) лінійності; 2) повинне відсікати знайдений не цілочисловий план; 3) не повинне відсікати жодного цілочислового плану. Таке обмеження називають ***правильним відсіканням***.

Таким чином, якщо розв'язок цілочислової задачі з послабленими обмеженнями не задовольняє вимогу цілочисельності, то розв'язується задача з додатковим обмеженням. У випадку отриманого знову не цілочислового плану, задача доповнюється ще одним правильним відсіканням. Такі дії проводяться доти, доки не буде отримано цілочислового оптимального плану.

Геометрично введення в обмеження правильного відсікання означає проведенню гіперплощини, що відсікає від многокутника планів задачі деяку його частину разом з оптимальною точкою з не цілочисловими координатами, але не відсікає жодної цілочислової точки многогранника планів задачі.

Різні алгоритми методів відсікання різняться між собою способами побудови додаткових обмежень. Вони застосовуються лише до лінійних цілочислових задач і мають ряд недоліків, один з яких – повільна збіжність.

До групи ***методів відсікання*** належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Р.Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Р.Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на переборі допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків, причому досить невелика.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод «гілок і меж».

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає розбиття множини планів задачі на підмножини, шляхом вилучення з множини планів підмножин, що містять дробові розв'язки задачі, для кожної з яких знаходять оцінку цільової функції за оптимумом.

Підмножини, які дають гірші оцінки, в подальшому не розглядаються. Далі процедуру повторюють доки не знайдуть підмножину, що включає лише оптимальний план. Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Дробовий алгоритм методу Р. Гоморі

Алгоритм методу Р.Гоморі ґрунтується на розв'язуванні цілочислових задач симплексним методом. Недоліком даного методу вважається його довга збіжність, тобто інколи доводиться багато разів повторювати етапи методу. Послідовність використання методу Р.Гоморі:

Симплексним методом розв'язується задача лінійного програмування. Якщо отримано цілочислові компоненти оптимального плану, то задача цілочислового програмування розв'язана. Якщо задача без умов цілочисельності змінних не має розв'язку (система її умов несумісна чи функція мети не обмежена з боку оптимуму), то і задача цілочислового програмування також не має розв'язку. Якщо серед компонент плану є не цілочислові, то переходимо до пункту 2.

Серед не цілих компонент плану (елементів стовпця вільних членів) вибираємо елемент з найбільшою дробовою частиною і за відповідним йому рядком симплексної таблиці формуємо правильне відсікання (1.5.5).

$$\{b_{k,m+1}\}x_{m+1}+\ldots+\{b_{kn}\}x_n \geq \{b_{k0}\} \qquad (1.5.5)$$

Таблиця 1.5.1

Оптимальний план задачі без урахування умов цілочисельності

Базисні змінні	***Небазисні змінні***			***Вільні члени***
	$-x_{m+1}$	…	$-x_n$	
$x_1 =$	$b_{1,m+1}$	…	b_{1n}	b_{10}
	…	…	…	…
$x_k =$	$b_{k,m+1}$	…	b_{kn}	b_{k0}
	…	…	…	…
$x_m =$	$b_{m,m+1}$	…	b_{mn}	b_{m0}
	…	…	…	…
$f =$	$b_{0,m+1}$	…	b_{0n}	b_{00}

У нерівності (1.5.5) символ $\{\cdots\}$ означає дробову частину числа. Дробовою частиною $\{a\}$ числа a є різниця між цим числом та його цілою частиною $[a]$, тобто найбільшим цілим числом, яке не перевищує задане число. Наприклад, нехай є число

$$a=7\frac{3}{5},\quad \text{то}\quad \left\{7\frac{3}{5}\right\}=7\frac{3}{5}-\left[7\frac{3}{5}\right]=7\frac{3}{5}-7=\frac{3}{5}.$$

Якщо число від'ємне, то маємо:

$$a=-7\frac{3}{5},\quad \text{то}\left\{-7\frac{3}{5}\right\}=-7\frac{3}{5}-\left[-7\frac{3}{5}\right]=-7\frac{3}{5}-(-8)=\frac{2}{5}.$$

Додаємо до лівої частини нерівності (1.5.5) додаткову змінну для перетворення нерівності на рівняння Дописуємо отримане рівняння в обмеження задачі як додатковий рядок до симплексної таблиці. Отримуємо розширену таблицю.

В отриманій таким чином розширеній таблиці робимо крок вилучень. Якщо отриманий план буде оптимальним і цілочисловим, то задача розв'язана. Якщо ні, то переходимо знову до пункту 2.

Може бути випадок, коли у процесі симплексних перетворень у рядку з не цілочисловим значенням вільного члена немає більше елементів з дробовою частиною. У цьому випадку робимо висновок, що задача не має цілочислового розв'язку.

Для закріплення матеріалу наведемо приклад розв'язування задачі лінійного програмування з цілочисловою умовою, накладеною на усі змінні задачі.

Приклад 1.5.1.

$$f=x_1+2x_2\to\max$$
$$-x_1+x_2\le 2$$
$$3x_1-x_2\le 7$$
$$x_1,x_2\ge 0,\text{цілі}$$

Приведемо задачу до стандартної постаті.

$$f=x_1+2x_2\to\max$$
$$-x_1+x_2+x_3=2$$
$$3x_1-x_2+x_4=7$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$$

Розв'яжемо послаблену задачу симплексним методом.

Таблиця 1.5.2

БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	1
x_3	-1	$\boxed{1}$	1	0	2
x_4	3	-1	0	1	7
f	-1	-2	0	0	0
x_2	-1	1	1	0	2
x_4	$\boxed{2}$	0	1	1	9
f	-3	0	2	0	4
x_2	0	1	3/2	1/2	13/2
x_1	1	0	1/2	1/2	9/2
f	0	0	7/2	3/2	35/2

Знайдено оптимальний план задачі з послабленими умовами, тобто не цілочислової. Запишемо його: $\overline{X}=\left(9/2;13/2;0;0\right)$, $f^*_{\max}=35/2$.

Але отриманий план не відповідає умові цілочисельності змінних. Побудуємо перший переріз Гоморі, тобто допишемо в умови задачі обмеження, що відповідає вимогам правильного відсікання:

$$\left\{9/2\right\}-\left(\left\{1/2\right\}x_3+\left\{1/2\right\}x_4\right)\le 0 \;\Rightarrow\; 1/2-\left(1/2\,x_3+1/2\,x_4\right)\le 0 \;\Rightarrow\; 1/2\,x_3+1/2\,x_4\ge 1/2$$

Введемо в отриману нерівність додаткову змінну u_1.

$$-1/2\,x_3-1/2\,x_4+u_1=-1/2.$$

Одержане рівняння вводимо в умови задачі.

Таблиця 1.5.3

БЗ	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	1
x_2	0	1	3/2	1/2	0	13/2
x_1	1	0	1/2	1/2	0	9/2
u_1	0	0	-1/2	$\boxed{-1/2}$	1	-1/2
f	0	0	7/2	3/2	0	35/2
x_2	0	1	1	0	1	6
x_1	1	0	0	0	1	4
x_4	0	0	1	1	-2	1
f	0	0	2	0	3	16

Отримали оптимальний цілочисловий розв'язок задачі. Запишемо його:

$$\overline{X}=(4;6;0;1), \qquad f^*_{\max}=16.$$

Метод «гілок і меж»

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є метод «гілок і меж» («віток і меж»). Спочатку, як і в методі Гоморі, розв'язується симплексним методом послаблена відкиданням умови цілочисельності задача. Нехай треба знайти x_j – цілочислову змінну, значення якої x_j^* в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left(\lfloor x_j^*\rfloor, \lfloor x_j^*\rfloor+1\right)$ цілих значень немає. Отже, допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей $x_j \le \lfloor x_j^*\rfloor$ або $x_j \ge \lfloor x_j^*\rfloor + 1$. Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі.

Тобто початкову задачу цілочислового програмування (1.5.1) – (1.5.4) розіб'ємо на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплексним методом розв'язуватимемо дві наступні задачі:

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr(\max,\min) \qquad (1.5.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le,=\ge\} a_{i0} \quad (i=1,2,...,m), \qquad (1.5.7)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=1,2,...,n), \qquad (1.5.8)$$

$$x_j - \text{цілі числа.} \qquad (1.5.9)$$

$$x_j \le \lfloor x_j^*\rfloor \qquad (1.5.10)$$

та

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr(\max,\min) \qquad (1.5.11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le,=\ge\} a_{i0} \quad (i=1,2,...,m), \qquad (1.5.12)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=1,2,...,n), \qquad (1.5.13)$$

$$x_j - \text{цілі числа} \qquad (1.5.14)$$

$$x_j \ge \lfloor x_j^*\rfloor + 1 \qquad (1.5.15)$$

де x_j^* – компонент розв'язку задачі (1.5.1) – (1.5.4).

Далі симплексним методом розв'язуємо послаблені задачі (1.5.6) – (1.5.10) та (1.5.11) – (1.5.15), тобто задачі з відкиданням обмежень (1.5.9) і (1.5.14). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисельності, то ці плани є розв'язками задачі (1.5.1) – (1.5.4).

У протилежному випадку продовжується пошук розв'язку задач. Для подальшого розгалуження вибирається задача з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки– з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення плану. Здобутий план і буде оптимальним.

Розв'язування цілочислових задач методом «гілок і меж» можна значно прискорити, приєднуючи обмеження виду (1.5.10) і (1.5.15) до останньої симплексної таблиці не початкової задачі (1.5.1) – (1.5.4), а відповідних задач.

Розв'яжемо методом «гілок і меж» задачу, розглянуту при висвітленні методу Гоморі.

Згадаємо знайдений оптимальний план початкової послабленої задачі:

$$\overline{X}=\left(9/2;13/2;0;0\right), f^*_{\max}=35/2$$

На інтервалі (4;5) змінна x_1 не може набувати цілих значень. Змінна x_2 не має цілих значень на інтервалі (6;7). Як бачимо цілі значення змінної x_1 знаходяться в інтервалах $x_1 \le 4$ та $x_1 \ge 5$, а змінної x_2 в інтервалах $x_2 \le 6$ та $x_2 \ge 7$. Тому виключимо завідомо дробові значення цих змінних з розгляду. Для цього введемо у задачі відповідні обмеження. Розгалузимо задачу на гілки, тобто область допустимих значень поділимо на частини. Утворюються нові задачі, кожну з яких дослідимо окремо.

Маємо:

задача A

$$\begin{aligned} &f = x_1 + 2x_2 \to \max \\ &-x_1 + x_2 \le 2 \\ &3x_1 - x_2 \le 7 \\ &x_1 \ge 5 \\ &x_2 \ge 7 \\ &x_1, x_2 \ge 0, \text{цілі} \end{aligned}$$

задача B

$$\begin{aligned} &f = x_1 + 2x_2 \to \max \\ &-x_1 + x_2 \le 2 \\ &3x_1 - x_2 \le 7 \\ &x_1 \le 4 \\ &x_2 \ge 7 \\ &x_1, x_2 \ge 0, \text{цілі} \end{aligned}$$

Задача C

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$-x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 - x_2 \le 7$$
$$x_1 \ge 5$$
$$x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{цілі}$$

задача D

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$-x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 - x_2 \le 7$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0, \text{цілі}$$

Задачі A, B і C мають суперечливу систему умов. Розв'язавши задачу D симплексним або графічним методом отримуємо оптимальний план цілочислової задачі:

$$\overline{X} = (4;6;0;1), \qquad f^*_{\max} = 16.$$

Можна проводити розгалуження поступово – вводити додаткові обмеження лише по одній із змінних, отримані значення яких в оптимальному плані послабленої задачі не відповідають умовам цілочисельності.

Метод вектора спаду

Метод вектора спаду (підйому) може застосовуватись як до лінійних, так і нелінійних задач. Він належить до наближених методів розв'язку задач математичного програмування.

Розробка та дослідження наближених алгоритмів є досить перспективним напрямком цілочислової оптимізації. Наближені методи заслуговують на увагу з практичного погляду, оскільки застосування точних методів потребує невиправдано значних витрат часу, тоді як пошук наближеного розв'язку дає змогу суттєво скоротити процес знаходження оптимального плану задачі.

При використанні наближених методів вибирається початковий допустимий план задачі. З таким можливим варіантом розв'язку пов'язується певна множина варіантів, які утворюють окіл початкового варіанта. Перебираючи елементи околу, здійснюється перехід до кращого плану або фіксується локальна оптимальність певного варіанта. В першому випадку процес локального покращення плану продовжується, а в другому здійснюється випадковий вибір наступного плану, який беруть за початок пошуку нового оптимального плану.

Наближені методи мають вказувати спосіб визначення околу та механізм випадкового пошуку. Крім того, необхідно також ввести правило, за допомогою якого визначається момент закінчення процесу пошуку наближеного розв'язку.

Метод вектора спаду розробив І.В.Сергієнко в середині 60-х років XX-го століття. У загальному випадку цей метод дає змогу знаходити локальний мінімум цільової функції, проте, якщо вона має відповідні властивості опуклості, то метод приводить до визначення глобального мінімуму.

Допустимо, що розглядається задача цілочислового програмування виду:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \tag{1.5.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} a_{i0} \quad (i = 1, 2, ..., m), \tag{1.5.17}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{1.5.18}$$

$$x_j - \text{цілі числа.} \tag{1.5.19}$$

Перш ніж описувати алгоритм методу вектора спаду, введемо деякі необхідні поняття.

Нехай *M* – деякий дискретний точковий простір. $\Omega \subset M$ – множина допустимих планів деякої цілочислової задачі виду (1.5.16) – (1.5.19). Введемо метрику в простір *M*, тобто функцію, що визначає відстань між довільними точками цього простору *X* та *Y*. Позначимо її через $p(X,Y)$. Метрика $p(X,Y)$ має задовольняти три аксіоми:

1) аксіому тотожності: $p(X,Y) = 0$ за умови, що $X = Y$;

2) аксіому симетрії: $p(X,Y) = p(Y,X)$;

3) аксіому нерівності трикутника: $p(X,Y) + p(Y,Z) \ge p(X,Z)$.

З аналітичної геометрії відомо, що відстань між точками, тобто функцію $p(X,Y)$ можна визначати по-різному. Зокрема, у прямокутній декартовій системі координат це може бути довжина вектора $\overline{X,Y}$ тобто

$$p(X,Y) = |X,Y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \ ,$$

де x_i, y_i – відповідно координати точок *X* та *Y* у просторі *M*.

Нехай X' деякий допустимий план задачі дискретного програмування. Якщо взяти деяке число $r>0$, то множина всіх точок $Y \in M_r$ для яких виконується нерівність $p(X',Y)<r$ називається ***відкритим околом*** з центром у точці X' і радіусом *r*, а множина всіх точок $Y \in M_r$, для яких виконується нерівність $p(X',Y) \le r$ називається ***закритим околом.***

Визначимо деякий окіл M_{r_1} точки X' з радіусом r_1, такий, що крім плану X' він містив би і інші плани задачі, для чого r_1 має бути не меншим від деякої величини *R*. Далі розглядатимемо лише зазначені околи планів задачі. Визначимо функцію $\Delta(X,Y)$ у такий спосіб: $\Delta(X,Y)=F(Y)-F(X)$.

Назвемо ***вектором спаду*** *v* функції $F(X)$ у деякому околі M_R довільної точки X', що є одним з допустимих розв'язків задачі цілочислового програмування $X' \in \Omega$, такий вектор, компонентами якого є величини $\Delta_i = \Delta(X;X_i)$, де X_i $(i=\overline{1,l})$ – плани задачі, що належать околу M_R.

Очевидно, що при невід'ємності всіх компонент вектора спаду $(\Delta_i \ge 0)$ в околі точки X' матимемо для будь-якого значення $X \in M_R$ $\Delta_i = \Delta(X',X_i) = F(X_i) - F(X') \ge 0$.

Остання нерівність означає, що точка X' є точкою локального мінімуму функції $F(X)$ відносно виділеного околу M_R, тобто:

$$F(X') = \min_{X_1 \in M \in \Omega} F(X_i)$$

Обчислювальну схему методу вектора спаду для розв'язання задачі мінімізації дійсної функції *f(x),* що визначена на деякому просторі *M* дискретного метричного простору *D* , можна описати таким чином.

Спочатку вибираємо деяке початкове наближення $x^0 \in M$ і радіус *r*. В просторі *D* розглядаємо окіл $O(x^0,r)$ радіуса *r* з центром в точці x^0. Досліджуючи координати вектора спаду, який характеризує зміни значень цільової функції в точках множини $O(x^0,r) \cap M$ порівняно з $f(x^0)$, визначаємо, чи є x^0 точкою локального мінімуму функції *f*. Якщо ні, то за допомогою вектора спаду в множині $O(x^0,r) \cap M$ вибираємо точку x^1, для якої значення цільової функції менше, ніж $f(x^0)$.

На наступній ітерації знову повторюємо цю ж процедуру, виходячи вже з x^1 як з центра нового околу, і так далі.

Процес обчислень вважається закінченим, якщо одержаний деякий локальний оптимальний розв'язок задачі. Алгоритм методу вектора спаду припускає зупинку обчислень на будь-якій ітерації, вважаючи остаточним результатом останній одержаний припустимий розв'язок задачі.

У релаксаційних методах звертаються до способу ослаблення (релаксації) обмежень і заміни цільової функції *f(x)* її мінорантою $f'(x)$ в задачі мінімізації, тобто функцією, яка задовольняє умову $f'(x) \le f(x)$ для всіх x.

З припустимої області M', що здобута розширенням вихідної області $M\,(M' > M)$ за рахунок ослаблення обмежень, M' і $f'(x)$ вибираються так, щоб, по-перше, релаксована задача допускала порівняно прості способи розв'язувань, і, по-друге, щоб вона найменше відрізнялась від вихідної за цільовою функцією і множиною припустимих розв'язків:

$$\min_{x \in M'} f'(x) \le \min_{x \in M'} f(x) \le \min_{x \in M} f(x) \qquad (1.5.20)$$

Розв'яжемо наступну задачу.

Приклад 1.5.2.

$$\begin{aligned} f = x_1 + 2x_2 &\to \max \\ -x_1 + x_2 &\le 2 \\ 3x_1 - x_2 &\le 7 \\ x_1, x_2 &\ge 0, \text{цілі} \end{aligned}$$

Приведемо задачу максимізації цільової функції до задачі мінімізації, шляхом множення коефіцієнтів цільової функції на (-1):

$$L = -f = -x_1 - 2x_2 \to \min .$$

За початкову точку візьмемо точку $x^0(0;2)$ – центр околу. Значення функції мети у цій точці – $L(x^0) = 0 - 2 \cdot 2 = -4$. Радіус візьмемо довжиною 1, тобто $r = 1$.

У околі початкової точки розгляду підлягають точки:

$x_1^0(0;3)$, $x_2^0(1;3)$, $x_3^0(1;2)$, $x_4^0(1;1)$, $x_5^0(0;1)$, $x_6^0(-1;1)$, $x_7^0(-1;2)$, $x_8^0(-1;3)$.

Точки $x_1^0(0;3)$, $x_4^0(-1;2)$, $x_6^0(-1;1)$, $x_7^0(-1;2)$ та $x_8^0(-1;3)$ не належать області допустимих планів задачі. Розрахуємо величини зміни значень функції мети за формулою:

$$\Delta(x^0;x_i^0) = L(x^0) - L(x_i^0)$$

$$\Delta(x^0;x_2^0) = -4-(-1-6) = 3$$

$$\Delta(x^0;x_3^0) = -4-(-1-4) = 1,$$

$$\Delta(x^0;x_4^0) = -4-(-1-1) = -2$$

$$\Delta(x^0;x_5^0) = -4-(0-1) = -3.$$

Точка $x_2^0(1;3)$ є новою точкою центру околу $x^1 = x_2^0(1;3)$. Значення функції мети у новому центрі $L(x^1) = -7$.

Будуємо новий окіл. До нього ввійшли точки:

$x_1^1(1;4)$, $x_2^1(2;4)$, $x_3^1(2;3)$, $x_4^1(2;2)$, $x_5^1(1;2)$, $x_6^1(0;2)$, $x_7(0;3)$, $x_8^1(0;4)$.

Точки $x_1^1(1;4)$, $x_7(0;3)$, $x_8^1(0;4)$ не є точками області існування планів задачі.

Точки $x_5^1(1;2)$ і $x_6^1(0;2)$ уже розглядались на попередньому кроці. Знову знаходимо різниці значень функції мети:

$$\Delta(x^1;x_2^1) = -7-(-2-8) = 3$$

$$\Delta(x^1;x_3^1) = -7-(-2-6) = 1$$

$$\Delta(x^1;x_4^1) = -7-(-2-4) = -1$$

Новою точкою околу буде точка $x^2 = x_2^1(2;4)$. Значення функції мети у новому центрі околу $L(x^2) = -10$.

Будуємо новий окіл. До нього ввійшли точки:

$x_1^2(2;5)$, $x_2^2(3;5)$, $x_3^2(3;4)$, $x_4^2(3;3)$, $x_5^2(2;3)$, $x_6^2(1;3)$, $x_7^2(1;4)$, $x_8^2(1;5)$.

Точки $x_1^2(2;5)$, $x_7^2(1;4)$ і $x_8^2(1;5)$ не належать області існування планів задачі. Точки $x_5^2(2;3)$ і $x_6^2(1;3)$ уже перевірялись. Знаходимо різниці значень функції мети:

$$\Delta(x^2;x_2^2) = -10-(-3-10) = 3$$

$$\Delta(x^2;x_3^2) = -10-(-3-8) = 1$$

$$\Delta(x^2;x_4^2) = -10-(-3-6) = -1$$

Новою точкою центру околу буде точка $x^3 = x_2^2(3;5)$. Значення функції мети у цій точці $L(x^3) = -13$.

Будуємо новий окіл. До нього ввійшли точки:

$$x_1^3(3;6),\ x_2^3(4;6),\ x_3^3(4;5),\ x_4^3(4;4),\ x_5^3(3;4),\ x_6^3(2;4),\ x_7^3(2;5),\ x_8^3(2;6).$$

Точки $x_1^3(3;6)$, $x_4^3(4;4)$, $x_7^3(2;5)$ і $x_8^3(2;6)$ не є точками, що задовольняють умови задачі. Точка $x_5^3(3;4)$ уже перевірялась на попередньому кроці. Перевіряємо точки $x_2^3(4;6)$, $x_3^3(4;5)$, $x_6^3(2;4)$.

$$\Delta(x^3; x_2^3) = -13 - (-4 - 12) = 3$$
$$\Delta(x^3; x_3^3) = -13 - (-4 - 10) = 1$$
$$\Delta(x^3; x_3^3) = -13 - (-2 - 8) = -3$$

Новою точкою центру околу буде точка $x^4 = x_2^3(4;6)$. Значення функції мети у цій точці $L(x^4) = -16$.

Будуємо новий окіл. До нього ввійшли точки:

$$x_1^4(4;7),\ x_2^4(5;7),\ x_3^4(5;6),\ x_4^4(5;5),\ x_5^4(4;5),\ x_6^4(3;5),\ x_7^4(3;6),\ x_8^4(3;7).$$

Точки $x_1^4(4;7)$, $x_2^4(5;7)$, $x_3^4(5;6)$, $x_4^4(5;5)$, $x_7^4(3;6)$, $x_8^4(3;7)$ не є точками, що задовольняють умови задачі. Точки $x_5^4(4;5)$ і $x_6^4(3;5)$ уже перевірялась на попередньому кроці.

Отже точка центру околу і є точкою мінімуму. Оскільки ми множили коефіцієнти функції мети на (-1), то поміняємо знак у значенні функції мети і матимемо максимум функції $f = -L(x^4) = 16$. Точкою оптимум є точка $x(4;6)$.

1.6. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальна задача лінійного програмування включає лінійні обмеження, лінійний вираз цільової функції та умови невід'ємності змінних. Проте на практиці при постановці задач часто доводиться зустрічатися з дробово-лінійною цільовою функцією, яка використовується для розрахунків відносних показників (собівартості, рентабельності, фондовіддачі, трудомісткості і т.п.), у чисельнику та знаменнику яких – лінійні вирази.

Математичне формулювання задачі дробово-лінійного програмування

Постановка задачі: задана дробово-лінійна цільова функція

$$\max(\min)\ Z=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+c_0}{\sum_{j=1}^{n}l_jx_j+l_0}=\frac{Z_1(\overline{x})}{Z_2(\overline{x})}, \tag{1.6.1}$$

де c_0 і l_0 відмінні від нуля,
система лінійних обмежень

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\begin{Bmatrix}\le\\=\\\ge\end{Bmatrix}a_{io}, \tag{1.6.2}$$

$$x_j\ge 0,\qquad i=1\div m,\qquad j=1\div n. \tag{1.6.3}$$

Потрібно знайти вектор $\overline{x}(x_1,x_2,...,x_{n+m})$, для якого дробово-лінійна цільова функція досягає максимуму(мінімуму), виконується система лінійних обмежень і умови невід'ємності змінних задачі.

Така задача називається ***задачею лінійного програмування з неоднорідною цільовою функцією***.

Знаменник дробово-лінійної цільової функції $Z_2(\overline{x})$ в області допустимих розв'язків не може перетворюватись на нуль. Крім того, знаменник $Z_2(\overline{x})$ в області допустимих розв'язків суворо додатний, у протилежному випадку, чисельник і знаменник дробово-лінійної цільової функції множать на мінус одиницю.

Якщо знаменник дробово-лінійної цільової функції в якій-небудь точці області допустимих розв'язків або відповідному опорному розв'язку дорівнює нулю, то цю точку **виколюють** з області допустимих розв'язків, а відповідний опорний розв'язок виключають, переходячи до нового опорного розв'язку, знаменник якого відмінний від нуля.

Дробово-лінійна цільова функція на довільному відрізку області допустимих розв'язків змінюється монотонно.

Задача дробово-лінійного програмування виду

$$\mathbf{max(min)}\ Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} l_j x_j}, \qquad (1.6.4)$$

де $\mathbf{c_0 = l_0 = 0}$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} a_{io}, \qquad (1.6.5)$$

$$x_j \ge 0, \qquad i = 1 \div m, \qquad j = 1 \div n, \qquad (1.6.6)$$

називається ***задачею лінійного програмування з однорідною цільовою функцією.***

Фундаментальна теорема дробово-лінійного програмування. Якщо область допустимих розв’язків задачі дробово-лінійного програмування не порожня та обмежена, то оптимальний розв’язок існує і досягається в одній із крайніх точок області допустимих розв’язків або в одному з опорних розв’язків системи обмежень.

Якщо оптимальний розв’язок досягається в декількох крайніх точках (альтернативний розв’язок), то довільна лінійна опукла комбінація цих точок чи відповідні їм опорні розв’язки також будуть оптимальними розв’язками.

Графічний метод розв’язку задач дробово-лінійного програмування з однорідною цільовою функцією

Приклад 1.6.1. Знайдемо графічний розв’язок задачі дробово-лінійного програмування:

$$max\ Z = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 - 2x_2},$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 6,$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$

$$-x_1 - x_2 \le -1,$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Алгоритм графічного розв'язку задачі

Будуємо систему координат.

Знаходимо область допустимих розв'язків системи умов задачі:

$$\mathbf{2x_1 + 3x_2 \le 6},$$
$$\mathbf{3x_1 + 2x_2 \le 6},$$
$$\mathbf{-x_1 - x_2 \le -1},$$
$$\mathbf{x_1, x_2 \ge 0}.$$

Одержимо багатокутник ***ABCDE*** – область допустимих розв'язків системи умов задачі (рис.1.6.1).

Перевіримо, як зображується лінія рівня задачі дробово-лінійного програмування з однорідною цільовою функцією.

а) припустимо, що цільова функція дорівнює постійній величині, тобто

$$\frac{\mathbf{3x_1 + x_2}}{\mathbf{x_1 - 2x_2}} = \mathbf{c}.$$

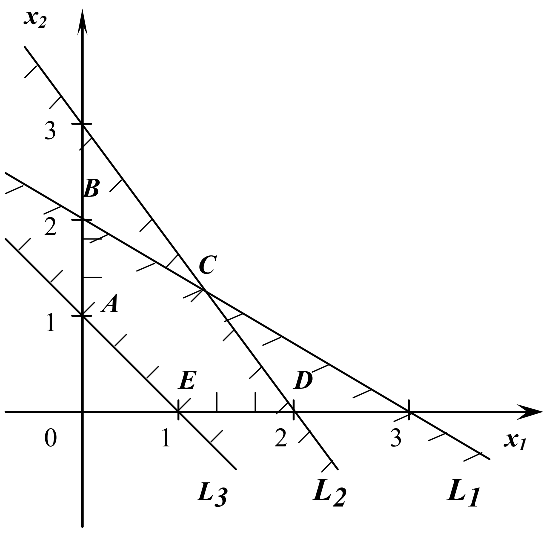


Рис.1.6.1.

Виконаємо перетворення:

$$3x_1 + x_2 = c(x_1 - 2x_2),$$
$$3x_1 + x_2 = cx_1 - 2cx_2,$$
$$x_2 + 2cx_2 = cx_1 - 3x_1,$$
$$(1+2c)x_2 = (c-3)x_1,$$
$$x_2 = \frac{c-3}{1+2c}x_1,$$

чи в загальному вигляді

$$x_2 = k \cdot x_1, \qquad \text{де} \qquad k = \frac{c-3}{1+2c};$$

б) отже, ***лінія рівня*** – ***пряма***, що проходить через початок координат.

При ***Z= const*** – це пряма з кутовим коефіцієнтом ***k.*** Змінюючи значення ***Z*** від $-\infty$ до $+\infty$, отримаємо пучок прямих. Зі зміною значення дробово-лінійної цільової функції лінія рівня обертається відносно центра обертання. У випадку однорідної цільової функції центр обертання – початок координат;

в) напрямок обертання лінії рівня можна визначити двома способами.

Перший спосіб **–** за знаком похідної:

$$\frac{\partial \cdot k}{\partial \cdot z} = \frac{\partial \cdot k}{\partial \cdot c},$$

$$\frac{\partial \cdot k}{\partial \cdot c} = \frac{(c-3)'(1+2c)-(c-3)(1+2c)'}{(1+2c)^2} = \frac{1(1+2c)-(c-3)\cdot(+2)}{(1+2c)^2} =$$
$$= \frac{1+2c-2c+6}{(1+2c)^2} = \frac{7}{(1+2c)^2}.$$

При зростанні цільової функції додатний знак похідної відповідає обертанню лінії рівня проти годинникової стрілки, від'ємний знак – за годинниковою стрілкою.

Другий спосіб **–** за двома значеннями цільової функції.

1) нехай $\boldsymbol{Z}$=0, тобто

$$\boldsymbol{Z} = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 - 2x_2} = 0, \qquad \text{отже,}$$

$$3x_1 + x_2 = 0, \qquad \text{тоді}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Знайдено координати двох точок, через які проходить пряма $\boldsymbol{Z}$=0.

2) надамо $\boldsymbol{Z}$ іншого значення, наприклад $\boldsymbol{Z}$=1, тобто:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 - 2x_2} = 1, \qquad \text{отже,}$$

$$3x_1 + x_2 = x_1 - 2x_2, \qquad \text{тоді}$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0.$$

Знайдемо координати точок, через які проходить пряма $\boldsymbol{Z}$=1:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, при збільшенні $\boldsymbol{Z}$ лінія рівня повертається проти годинникової стрілки (рис.1.6.2).

При зміні значення цільової функції лінія рівня обертається, а її граничне положення, при якому існує спільна точка з областю допустимих розв'язків, визначає оптимальний розв'язок (рис. 1.6.2).

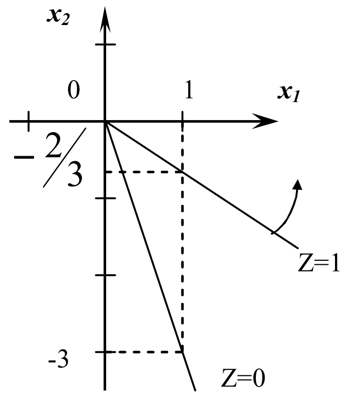


Рис.1.6.2.

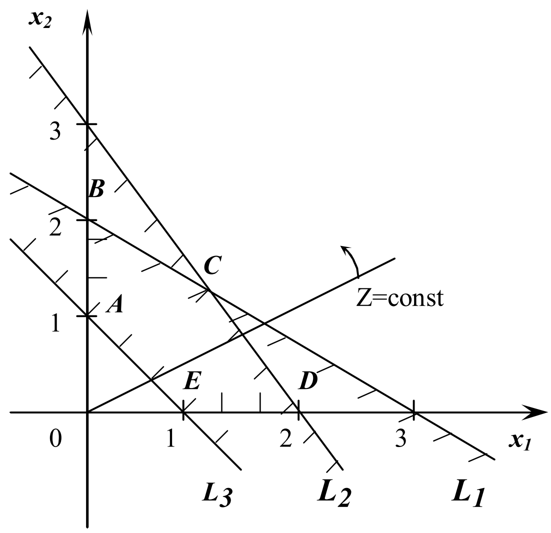


Рис.1.6.3.

Для прикладу 1.6.1 оптимальний розв'язок досягається на відрізку $\left[A^*B^*\right]$, де $A^*(0,1)$, $B^*(0,2)$,

$$\max Z\left(A^*\right)=\frac{3\cdot 0+1}{0-2\cdot 1}=-\frac{1}{2}\ , \qquad \max Z\left(B^*\right)=\frac{3\cdot 0+2}{0-2\cdot 2}=-\frac{1}{2}\ .$$

Графічний метод розв'язування задач дробово-лінійного програмування з неоднорідною цільовою функцією

Приклад 1.6.2. Нехай треба знайти графічний розв'язок наступної задачі дробово-лінійного програмування (див. умову прикладу 1.6.1):

$$\max Z = \frac{3x_1 + x_2 + 2}{x_1 - 2x_2 - 4}$$

при системі обмежень:

$$2x_1 + 3x_2 \le 6,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$-x_1 - x_2 \le -1,$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

Алгоритм графічного розв'язку

1. Будуємо систему координат.
2. Знаходимо область допустимих розв'язків системи умов задачі. Це багатокутник ***ABCDE*** (рис.1.6.1).
3. Вияснимо, як зображується лінія рівня задачі дробово-лінійного програмування з неоднорідною цільовою функцією.

а) припустимо, що цільова функція дорівнює постійній величині, тобто

$$\frac{3x_1 + x_2 + 2}{x_1 - 2x_2 - 4} = c.$$

Тоді

$$3x_1 + x_2 + 2 = c(x_1 - 2x_2 - 4),$$
$$3x_1 + x_2 + 2 = cx_1 - 2cx_2 - 4c,$$
$$x_2 + 2cx_2 = cx_1 - 3x_1 - 2 - 4c,$$

$$x_2 = \frac{c-3}{1+2c} x_1 + \frac{-2-4c}{1+2c},$$

або в загальному вигляді

$$x_2 = kx_1 + b,$$

де $\quad k = \dfrac{c-3}{1+2c}; \qquad b = \dfrac{-2-4c}{1+2c} = \dfrac{-2\cdot(1+2c)}{1+2c} = -2;$

б) Отже, лінія рівня – пряма, яка не проходить через початок координат. Коефіцієнти k та b є функціями від константи c, отже вони однозначно визначені для кожної c і лінія рівня має певне положення.

Зі зміною значення дробово-лінійної цільової функції лінія рівня обертається відносно центра обертання.

У випадку неоднорідної цільової функції центр обертання визначається з розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} Z_1 = 0, \\ Z_2 = 0, \end{cases}$$

або для прикладу 1.6.2:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -2, \\ x_1 - 2x_2 = \ 4, \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-3), \end{array} \right.$$

$$7x_2 = -14,$$

$$x_2 = -2,$$

$$x_1 = 4 + 2x_2,$$

$$x_1 = 4 + 2\cdot(-2),$$

$$x_1 = 0.$$

Отже, центром обертання даної цільової функції є точка $O'(0;-2)$ (рис. 1.6.4).

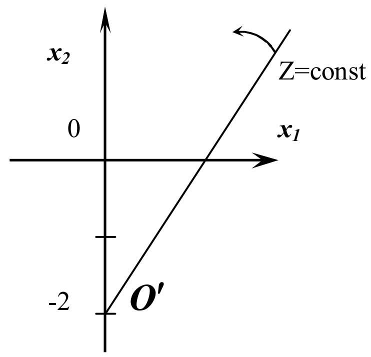


Рис. 1.6.4.

в) напрямок обертання лінії рівня визначається:

Перший спосіб – за знаком похідної $\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial k}{\partial c}$

(при зростанні цільової функції додатний знак похідної відповідає обертанню лінії рівня проти годинникової стрілки, від'ємний знак – за годинниковою стрілкою, рис. 1.6.4).

Другий спосіб – за двома значеннями цільової функції (рис. 1.6.5).

Для прикладу 1.6.3 розглянемо другий спосіб визначення напрямку обертання лінії рівня. Нехай:

1) $\quad \boldsymbol{Z = \frac{3x_1 + x_2 + 2}{x_1 - 2x_2 - 4} = 0}$; тоді

$$\boldsymbol{3x_1 + x_2 + 2 = 0},$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0}, \\ \boldsymbol{x_2 = -2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 1}, \\ \boldsymbol{x_2 = -2 - 3 = -5}. \end{cases}$$

Через знайдені точки проведемо пряму ***Z***=0 (рис.1.6.5).

2) Надамо ***Z*** іншого значення, наприклад, нехай ***Z***=1:

$$Z = \frac{3x_1 + x_2 + 2}{x_1 - 2x_2 - 4} = 1, \qquad \text{отже,}$$

$$3x_1 + x_2 + 2 = x_1 - 2x_2 - 4,$$
$$2x_1 + 3x_2 = -6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

Знайдено координати точок, через які проходить пряма Z=1 (рис.1.6.5).

Отже, лінія рівня обертається проти годинникової стрілки.

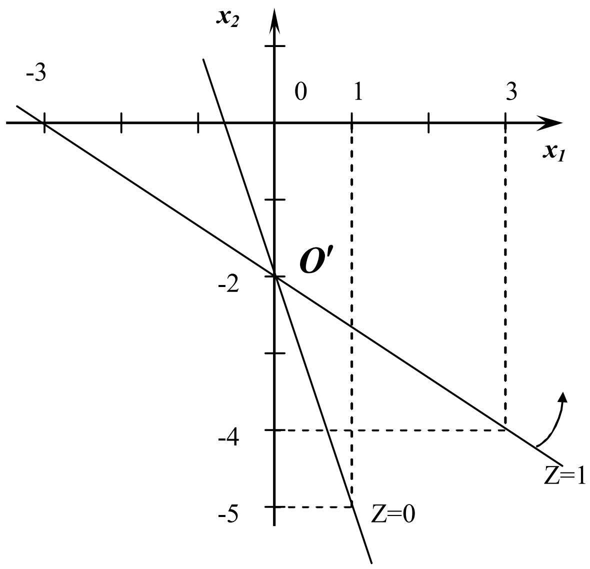


Рис. 1.6.5

3. При зміні значення цільової функції лінія рівня обертається, її граничне положення, спільна точка з областю допустимих розв'язків і визначає оптимальний розв'язок (рис.1.6.6).

Для прикладу 1.6.2 оптимальний розв'язок досягається на відрізку $\left[A^* B^*\right]$, максимум цільової функції дорівнює $Z_{max} = -\frac{1}{2}$.

При розв'язанні задач дробово-лінійного програмування зустрічаються такі варіанти графічного розв'язку.

1. Область допустимих розв'язків – обмежена та опукла (обмежений опуклий багатокутник). Можливі такі випадки:

а) Оптимальний розв'язок існує і досягається в одній з крайніх точок (вершині).

Графічно цей випадок зображений на рис.1.6.7, де областю допустимих розв'язків є багатокутник ***ABCD***, оптимальний розв'язок досягається в точці $D^*(2;0)$;

б) оптимальний розв'язок існує і досягається на відрізку.

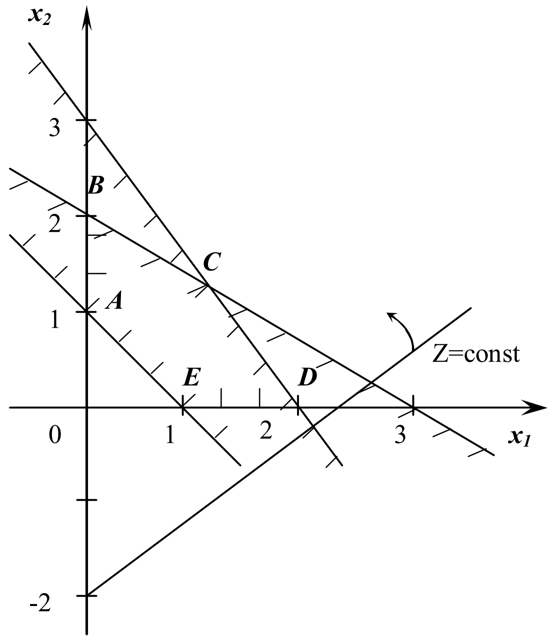


Рис. 1.6.6

Можливі варіанти графічного розв'язку задач дробово-лінійного програмування

Цей випадок графічно зображений на рис.1.6.6, де областю допустимих розв'язків є багатокутник ***ABCDE***, оптимальне рішення досягається на відрізку $[A^*B^*]$, альтернативний оптимальний розв'язок записується у вигляді:

$$\overline{X} = (1-t)\overline{A}^* + t\overline{B}^*, \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le 1,$$

де $A^*(0;1)$; $B^*(0;2)$.

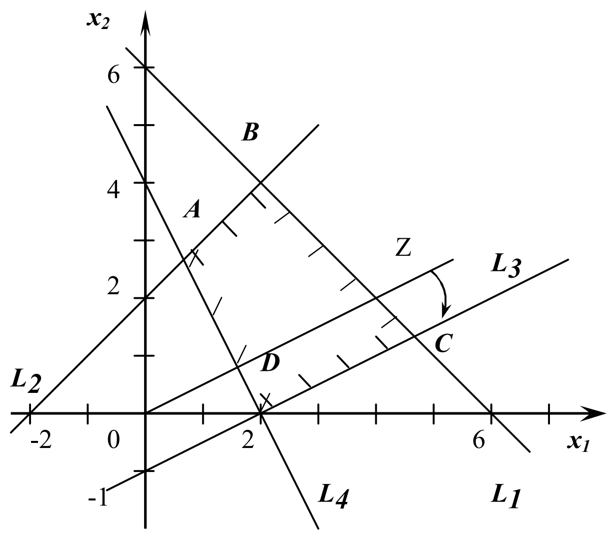


Рис. 1.6.7

2. Область допустимих розв'язків – опукла, необмежена, з кінцевим числом вершин. Можливі випадки:

а) оптимальний розв'язок існує і досягається в одній із вершин області допустимих розв'язків. У графічному вигляді цей випадок зображений на рис.1.6.8. Оптимальний розв'язок досягається в точці A^*;

б) оптимальний розв'язок існує і досягається на відрізку. У графічному вигляді цей випадок зображено на рис.1.6.9. Оптимальний розв'язок досягається на відрізку $[B^*C^*]$. Альтернативний оптимальний розв'язок записується у вигляді:

$$\overline{X}^A = (1-t)\,\overline{B}^A + t\,\overline{C}^n \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le 1,$$

де $B^*(2;0)$; $C^*(4;0)$;

в) оптимальних розв'язків немає, оскільки цільова функція не обмежена на множині планів задачі (рис.1.6.10);

г) оптимальний розв'язок є асимптотичним.

Розглянемо цей випадок детальніше.

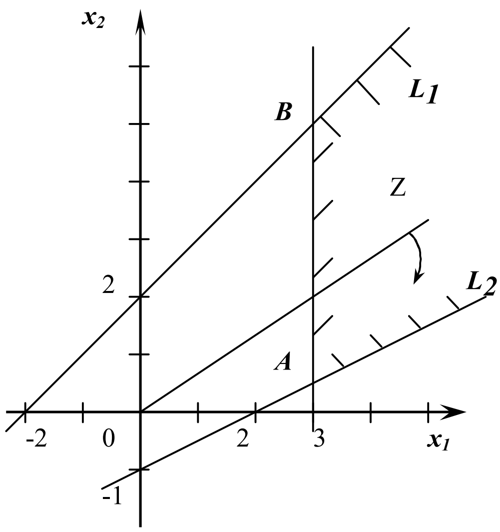


Рис. 1.6.8.

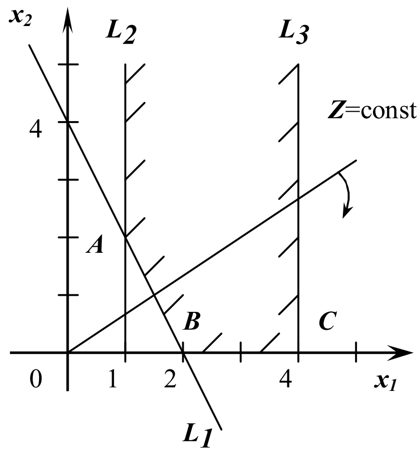


Рис. 1.6.9

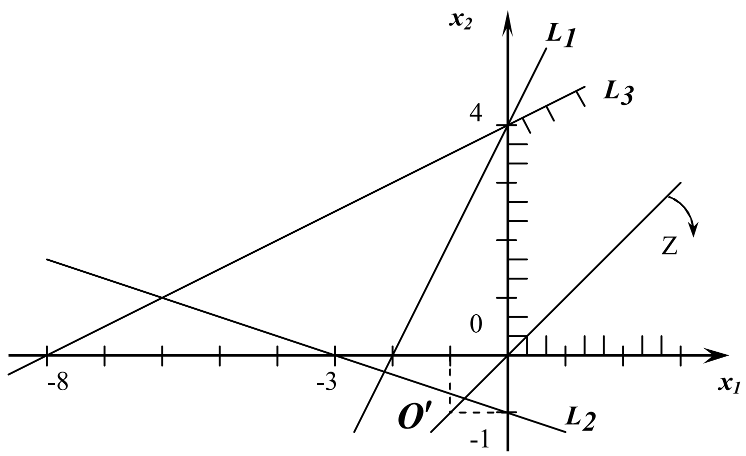


Рис. 1.6.10

Приклад 1.6.3.

Знайти $$maxZ = \frac{-x_1 + x_2}{x_1 + x_2},$$

при обмеженнях

$$3x_1 - x_2 \geq 3,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6.$$

і умовах невід'ємності змінних

$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$

Система умов задачі з геометричної точки зору – це необмежена область допустимих розв'язків з кінцевим числом вершин (рис. 1.6.11).

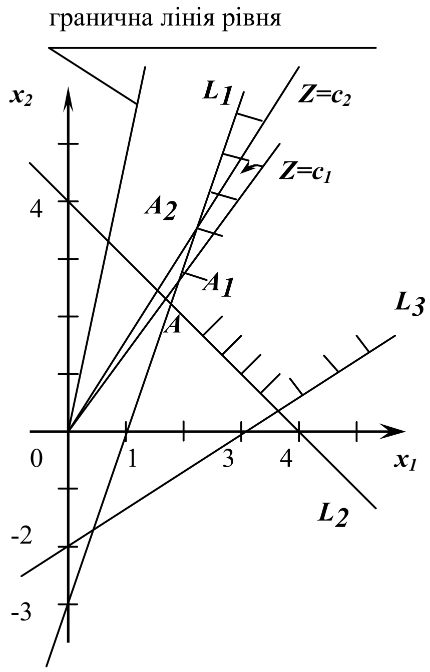


Рис. 1.6.11.

Нехай $\dfrac{-x_1 + x_2}{x_1 + x_2} = c,$

тоді

$$-x_1 + x_2 = c(x_1 + x_2),$$

$$x_2 - cx_2 = x_1 + cx_1,$$
$$x_2 = \frac{1+c}{1-c}x_1; \qquad k = \frac{1+c}{1-c};$$
$$\frac{\partial k}{\partial c} = \frac{2}{(1-c)^2}; \qquad \frac{\partial k}{\partial c} > 0.$$

Отже, зростання цільової функції відбувається при обертанні лінії рівня проти годинникової стрілки. Центром обертання є початок координат.

Нехай $Z = c_1$. Перетин лінії рівня з граничною прямою (L_1) – точка A_1 (рис.1.6.11). Повернемо лінію рівня у напрямку, зображеному стрілкою (у напрямку зростання Z), наприклад, до положення $Z = c_2$. Перетин лінії рівня з граничною прямою (L_1) переміститься з точки A_1 у точку A_2. При подальшому обертанні лінії рівня точка перетину її з граничною прямою (L_1) буде віддалятись у нескінченність, при цьому значення цільової функції буде зростати.

Наприклад, при $Z = c_n$ перетин лінії рівня з граничною прямою (L_1) буде на великій відстані від початку координат у точці A_n. Та збільшивши значення цільової функції $Z = c_{n+1}$ та повернувши лінію рівня, одержимо нову точку перетину A_{n+1}, яка ще більше віддалиться від початку координат. Тому в області допустимих розв'язків немає оптимального розв'язку $\bar{x}^*$ такого, щоб для всіх допустимих розв'язків $\bar{x}$ виконувалась нерівність $Z(\bar{x}^*) \geq Z(\bar{x})$. Чи обмежена цільова функція в області допустимих розв'язків у цьому випадку?

При обертанні лінії рівня у напрямку зростання цільової функції точка A перетину лінії рівня з граничною прямою (L_1) входить у нескінченність (на рис.1.6.11 – це "гранична" лінія рівня). Знайдемо значення цільової функції Z, відповідне цьому положенню лінії рівня.

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ завжди належать прямій (L_1). З рівняння прямої (L_1) виразимо x_2 через x_1.

$$3x_1 - x_2 = 3;$$
$$x_2 = -3 + 3x_1.$$

Підставимо цей вираз у чисельник і знаменник цільової функції і знайдемо межу цільової функції при $x_1 \to \infty$.

$$\lim_{x_1 \to \infty} Z = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{-x_1 + (-3 + 3x_1)}{x_1 + (-3 + 3x_1)} = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{2x_1 - 3}{4x_1 - 3} = \frac{1}{2}.$$

Отже, в області допустимих розв'язків всі значення цільової функції менші $\frac{1}{2}$.

Таким чином $Z(\bar{x}) < \frac{1}{2}$, а точки, для якої б $Z = \frac{1}{2}$, в області допустимих розв'язків немає.

Цей випадок називають ***асимптотичним оптимальним розв'язком***. Отже,

$$\bar{x}^*_{ac}(x_1; -3 + 3x_1), \qquad Z_{ac} = \frac{1}{2}.$$

Область допустимих розв'язків – точка, оптимальний розв'язок існує і досягається в точці. У графічному вигляді цей випадок зображено на рис.1.6.12.

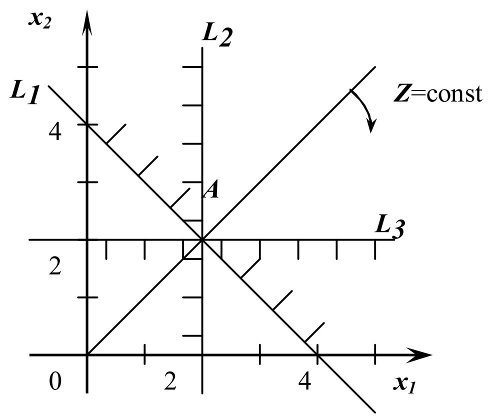


Рис. 1.6.12

Область допустимих розв'язків порожня – система обмежень несумісна. Необхідно коректувати умови задачі (рис.1.6.13).

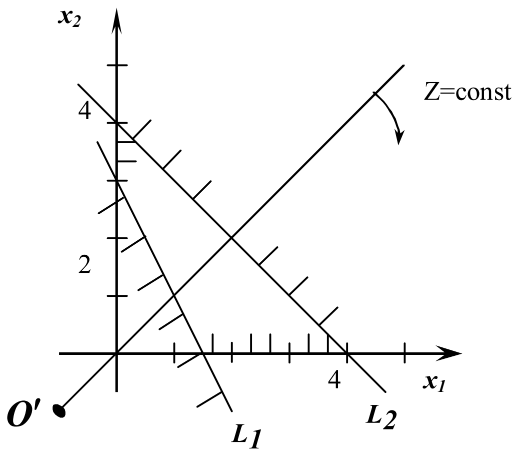


Рис. 1.6.13.

Висновки

1. Областю розв'язків задачі дробово-лінійного програмування є обмежений опуклий багатокутник, або необмежена опукла багатогранна область.

2. Якщо задача дробово-лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то він досягається в одній з вершин області допустимих розв'язків (за винятком асимптотичного оптимального розв'язку).

3. Якщо задача дробово-лінійного програмування не має розв'язків, то це відбувається:

а) через несумісність системи обмежень;

б) необмеженість цільової функції.

1.7.ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

Нагадаємо, що у загальному виді постановка задачі математичного програмування полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення цільової функції

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

за умов

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\{\le, \ge, =\}b_i$, $\left(i=\overline{1,m}\right)$, де f та g_i – задані функції, а b_i – деякі дійсні числа.

Якщо функції f та g_i функції лінійні, то ми маємо справу з лінійними задачами.

У багатьох задачах математичного програмування, як лінійних так і нелінійних, вихідні дані залежать від деякого параметра. Такі задачі відносять до класу параметричних задач.

Присутність параметрів у цільових функціях економічних задач зазвичай пов'язане з сезонними коливаннями цін на продукцію, а їх присутність у векторі обмежень – з коливаннями обсягу ресурсів (рівня запасів або обсягів постачання сировини) на підприємстві. Досить природно зробити припущення лінійної залежності цін і обсягів ресурсів, попиту на продукцію на деякому короткому проміжку часу. Тому логічно буде застосовувати лінійні параметричні моделі для відшукання розв'язків таких задач.

Загальна задача лінійного програмування містить постійні величини: коефіцієнти цільової функції c_j, коефіцієнти системи обмежень a_{ij}, вільні члени b_i, $(i = 1,2,\ldots,m)$, $(j = 1,2,\ldots,n)$. Але на практиці ці величини часто не є постійними, їх значення змінюються в деяких інтервалах. Тому, розв'язуючи задачу лінійного програмування, необхідно не тільки отримати оптимальний план деякої економічної задачі при фіксованих значеннях c_j, a_{ij}, b_i, але і дослідити залежність оптимального розв'язку від параметрів, що змінюються, тобто встановити, в яких допустимих межах можна їх змінювати, щоб план залишався оптимальним. Виникають так звані оптимізаційні задачі з параметрами.

Предметом дослідження оптимізаційних моделей з параметрами є ***параметричне лінійне програмування***. Параметричне програмування виникло в зв'язку з вивченням задач управління виробництвом і дає можливість знаходити оптимальні варіанти розвитку різноманітних процесів, описаних лінійною математичною моделлю.

Якщо розглядається лінійна залежність коефіцієнтів цільової функції або вільних членів від одного параметра, дослідження проводяться на основі універсального методу розв'язування лінійних оптимізаційних задач – симплексного методу.

Оптимізаційні моделі з параметром у цільовій функції

Припустимо, що коефіцієнт c_j цільової функції

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.7.1}$$

може змінюватися в деяких допустимих межах, наприклад, від $c_j-\alpha$ до $c_j+\alpha$, тоді для зручності дослідження коефіцієнти цільової функції можна замінити виразом $c'_j+tc''_j$, де c'_j і c''_j – константи, а t – параметр, який змінюється в деяких межах.

У такому випадку математично можна сформулювати наступну задачу.

Задана лінійна функція

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(c'_j+t\,c''_j)\,x_j \tag{1.7.2}$$

і система лінійних обмежень

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j+x_{n+1}=b_i\,;(i=1,2,...,m),\\ x_j\geq 0;\ (j=1,2,...,n+m).\end{gathered} \tag{1.7.3}$$

Для кожного значення t в інтервалі $\alpha \le t \le \beta$, де α і β – довільні дійсні числа, знайти невід'ємний вектор $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, який задовольняє систему обмежень (1.7.3) та забезпечує одержання екстремального, тобто мінімального або максимального значення цільової функції.

В **загальному вигляді**:

$$\max Z=(c'_1+c''_1t)\,x_1+(c'_2+c''_2t)\,x_2+...+(c'_n+c''_nt)\,x_n \tag{1.7.4}$$

за таких умов:

$$\begin{gathered}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\le b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n\le b_m\\ x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,n})\end{gathered} \tag{1.7.5}$$

Розв’язати задачу параметричного програмування означає розбити відрізок зміни параметра $[\alpha, \beta]$ на ряд відрізків, в кожному з них знайти оптимальний план задачі (що не залежить від параметра) і вказати на кожному відрізку залежність цільової функції від параметра.

Наведемо ***геометричну інтерпретацію задачі*** параметричного програмування.

Розглянемо задачу з двома змінними.

Знайти максимальне значення цільової функції при заданих умовах:

$$\max \boldsymbol{Z} = (c_1' + t c_1'')x_1 + (c_2' + t c_2'')x_2 \tag{1.7.6}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{1.7.7}$$

$$\alpha \le t \le \beta \tag{1.7.8}$$

Нехай область допустимих значень зображена трикутником *ABC* на рис.1.7.1.

Нехай $t = \alpha$, тоді при конкретних значення коефіцієнтів C_j' і C_j'' побудуємо лінію рівня ***(Z)*** таким чином, щоб вона проходила через початок координат. У такому випадку оптимальний розв’язок буде у точці ***B***.

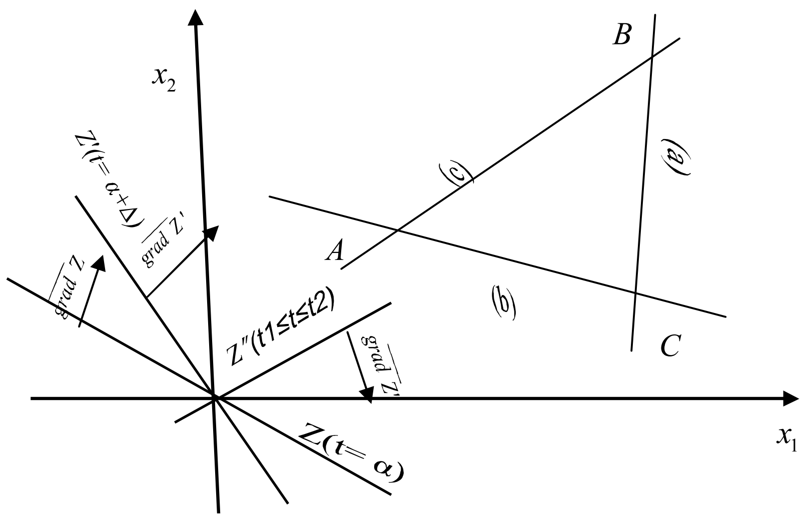


Рис.1.7.1. Графічна ілюстрація розв’язку задачі параметричного програмування

$$\overline{X}^{*} = (x_1^B, x_2^B), \qquad (1.7.9)$$
$$Z^{*} = (C_1' + \alpha C_1'')x_1^B + (C_2' + \alpha C_2'')x_2^B \qquad (1.7.10)$$

При збільшенні значення параметра t коефіцієнти при x_1 та x_2 в цільовій функції змінюються і лінія рівня (*Z)* повернеться навколо початку координат (*Z'*), але оптимальний розв'язок залишиться в точці *B*. Ця точка буде оптимальною при збільшенні параметра t до якогось значення t_1, при якому лінія рівня буде паралельною відрізку ***BC.***

$$\alpha \le t \le t_1$$
$$\overline{X}^{*} = (x_1^B, x_2^B)$$
$$Z^{*} = (C_1' + tC_1'')x_1^B + (C_2' + tC_2'')x_2^B = (C_1'x_1^B + C_2'x_2^B) + (C_1''x_1^B + C_2''x_2^B)t,$$

де $(C_1'x_1^B + C_2'x_2^B)$ і $(C_1''x_1^B + C_2''x_2^B)$ – числа, а t – змінна.

Звідси випливає, що на відрізку $[\alpha, t_1]$ цільова функція є лінійною функцією параметра.

Будемо збільшувати параметр ***t.*** В результаті виділиться новий відрізок $[t_1, t_2]$, для якого оптимальний розв'язок буде досягатися в точці ***C*** (***Z''***) і т. д.

Таким чином, при зміні параметра t лінія рівня повертається навколо початку координат, а оптимальний розв'язок переходить із однієї вершини в іншу, залишаючись в кожній вершині до того моменту, поки параметр t проходить відповідний відрізок. На деяких відрізках оптимальний розв'язок може і не існувати, якщо $Z \to \pm\infty$ (при необмеженій області допустимих розв'язків).

Оскільки завдання параметричного програмування – знайти відрізки по параметру і відповідні оптимальні розв'язки шляхом перебору вершин області допустимих розв'язків (тобто опорних планів), то для цього можна використовувати симплексний метод.

У симплексному методі при будь-яких коефіцієнтах цільової функції C_j оцінки обчислюються за формулою:

$$\Delta_j = \sum_{i \in базису} a_{ij} C_i^{б} - C_j \quad \text{для} \quad j = 0, 1, ..., n. \qquad (1.7.11)$$

Тому, за цільової функції

$$Z = \sum_{j=1}^{n} (C_j' + tC_j'')x_j \qquad (1.7.12)$$

можна використати таку формулу :

$$\Delta_j = \sum_{i \in базис} (c_i^{'} + t\, c_i^{''})\alpha_{ij} - (c_j^{'} + t\, c_j^{''}) \tag{1.7.13}$$

Перетворимо цю формулу, виділивши вільні члени і коефіцієнти при параметрі ***t*:**

$$\Delta_j = (\sum_{i \in азису} c_i^{'}\alpha_{ij} - c_j^{'}) + t(\sum_{i \in базису} c_i^{''}\alpha_{ij} - c_j^{''}) = \Delta_j^{'} + t\Delta_j^{''}, \tag{1.7.14}$$

де $\Delta_j^{'}$ і $\Delta_j^{''}$ обчислюються за формулою оцінок через коефіцієнти $C_j^{'}$ та $C_j^{''}$.

У симплексній таблиці для цих оцінок можна відвести спеціальні рядки і потім обчислювати загальну оцінку Δj при заданому значенні ***t*:** $\Delta_j = \Delta_j^{'} + t\,\Delta_j^{''}$.

Алгоритм параметричного програмування з параметром у цільовій функції

1. Запишемо вихідний опорний розв'язок в симплексну таблицю, введемо рядки $\Delta_j^{'}$ та $\Delta_j^{''}$ (табл.1.7.1).

Таблиця 1.7.1

Симплексна таблиця для розв'язку задачі лінійного програмування з параметром в цільовій функції

c_j		c_1	c_2	…	c_j	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	$-c_b$
$c_i^Б$	Б \ З	x_1	x_2	…	x_j	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	b
c_1	x_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1n}	b_1
c_2	x_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_i	x_i	…	0	…	1	…	0	a_{im+1}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}	b_m
$\Delta_j^{'}$		$\Delta_1^{'}$	$\Delta_2^{'}$	…	$\Delta_j^{'}$	…	$\Delta_m^{'}$	$\Delta_{m+1}^{'}$	…	$\Delta_n^{'}$	$\Delta_0^{'}$
$\Delta_j^{''}$		$\Delta_1^{''}$	$\Delta_2^{''}$	…	$\Delta_j^{''}$	…	$\Delta_m^{''}$	$\Delta_{m+1}^{''}$	…	$\Delta_n^{''}$	$\Delta_0^{''}$
$t=\alpha$	Δ_j	Δ_1	Δ_2	…	Δ_j	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	Δ_n	Δ_0

2. Покладемо $t = \alpha$ (початкове значення параметра) чи $t = t_{нижн}$ (нижня границя відрізку) та обчислимо $\Delta_j = \Delta'_j + t\,\Delta''_j$, $j = (0 \div n)$.

3. Розв'яжемо задачу симплексним методом, вибираючи розв'язуючий стовпчик за сумарною оцінкою Δ_j, отриманою при $t = \alpha$ до моменту знаходження оптимального плану. При перерахунку таблиці одночасно будемо перетворювати рядки Δ'_j і Δ''_j за загальними правилами.

4. Випишемо оцінки Δ'_j і Δ''_j в оптимальному плані:

$$\Delta'_j : \Delta'_1, \Delta'_2, ..., \Delta'_j, ..., \Delta'_n, \Delta'_0$$

$$\Delta''_j : \Delta''_1, \Delta''_2, ..., \Delta''_j, ..., \Delta''_n, \Delta''_0$$

Опорний оптимальний розв'язок, записаний в таблиці, буде оптимальним доти, доки усі оцінки Δ_j невід'ємні, тобто при визначенні відрізка значень параметра t, для якого в таблиці записаний оптимальний розв'язок, необхідно розв'язати систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} \Delta'_1 + t\,\Delta''_1 \geq 0 \\ \Delta'_2 + t\,\Delta''_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots \\ \Delta'_j + t\,\Delta''_j \geq 0 \\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots \\ \Delta'_n + t\,\Delta''_n \geq 0 \end{cases}$$

Ця система має розв'язок, оскільки при $t = \alpha$ чи $t = t_{нижн}$ в таблиці отримані сумарні невід'ємні оцінки:

а) якщо $\Delta'_j = \Delta''_j = 0$, то $0 + 0 \cdot t \geq 0$ і t – будь-яке число;

б) якщо $\Delta''_j > 0$, то $\Delta'_j + t \cdot \Delta''_j \geq 0$ і $t \geq \dfrac{-\Delta'_j}{\Delta''_j}$;

в) якщо $\Delta''_j < 0$, то $\Delta'_j + t\cdot\Delta''_j \le 0$ і $t \le \frac{-\Delta'_j}{\Delta''_j}$;

г) якщо $\Delta''_j = 0$ і $\Delta'_j \ne 0$, то $\Delta'_j \ge 0$ і t – будь-яке число.

Загальний розв'язок $t_{нижнього} \le t \le t_{верхнього}$

$$t_{НИЖНЄ} = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{-\Delta'_j}{\Delta''_j}\right\}, & (\Delta''_j > 0) \\ -\infty, & (усі\ \ \Delta''_j \le 0) \end{cases}$$

$$t_{ВЕРХНЄ} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{-\Delta'_j}{\Delta''_j}\right\}, & (\Delta''_j < 0) \\ +\infty, & (усі\ \ \Delta''_j \ge 0) \end{cases}$$

(при розв'язуванні конкретного прикладу межі зміни параметра визначаються безпосередньо з числових співвідношень).

5. Випишемо оптимальний розв'язок на знайденому відрізку:

$\overline{X}_1^* = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$, $\quad Z_1^* = \Delta'_0 + t\,\Delta''_0$

і координати відрізка $[\ t_{нижнє}, t_{верхнє}\ ]$.

Якщо $t_{верхнє} \ge \beta$,

то розв'язування задачі завершено,

якщо $t_{верхє} < \beta$,

то переходимо до пункту 6.

6. Знаходимо границі наступного відрізка.

$$t_{верхнє} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{-\Delta'_j}{\Delta''_j}\right\}, & (\Delta''_j < 0) \\ +\infty, & (усі\ \Delta''_j \ge 0) \end{cases}$$

а) якщо $t_{верхнє} = +\infty$,

то оптимальний розв'язок зберігається на всьому відрізку $[\alpha;\beta]$ і розв'язування задачі завершено;

б) якщо $t_{верхнє} = \min\left\{\frac{-\Delta'_j}{\Delta''_j}\left(при\ \Delta''_j < 0\right)\right\} = \frac{\Delta'_{j*}}{\Delta''_{j*}}$,

то вибираємо $j^* = j$, при якому досягається мінімум.

Якщо $t_{верхнє} < \beta$,

то при $t = t_{верхнє}$ хоча б одна із оцінок вільних змінних стане нулем:

$$\Delta_{j*} = \Delta'_{j*} + t\Delta''_{j*} = \Delta'_{j*} + \left(\frac{-\Delta'_{j*}}{\Delta''_{j*}}\right)\cdot\Delta''_{j*} = 0$$

і при подальшому збільшенні t оцінка Δ_{j*} стане від'ємною, розв'язок втратить свою оптимальність.

Щоб перейти до нового оптимального розв'язку стовпчик з номером j_* потрібно вибрати розв'язуючим (тобто вибирається той стовпчик, в якому при $t = t_{верхнє}$ оцінка стане нулем).

7. Зробимо симплексне перетворення одноразового заміщення з вибраним розв'язуючим стовпчиком і отримаємо новий оптимальний розв'язок, в якому загальна оцінка Δ_j обчислюється для $t = t_{верхнє}$ для попереднього відрізка.

Далі переходимо до пункту 4 (записуємо нову систему нерівностей і визначаємо наступний відрізок для параметру t).

Процес розв'язування продовжимо доти, доки не закінчиться розбиття всього заданого інтервалу $[\alpha, \beta]$ зміни параметра t на відрізки.

Зауваження!

При розв'язуванні задачі параметричного програмування можуть трапитись наступні ***особливі випадки:***

1. $t_{нижнє} = t = t_{верхнє}$ (при розв'язуванні системи нерівностей отримуємо лише одну точку).

У цьому випадку необхідно продовжити розв'язок, тобто вибрати розв'язуючий стовпчик, перерахувати таблицю, отримати нові розв'язки і вибрати новий інтервал. Якщо знову буде отримана точка, то продовжити розв'язок, доки не буде знайдений відрізок або виявлений цикл.

2. Може трапитись, що $t_{верхнє}$, тобто

$$\min\left\{\frac{-\Delta'_j}{\Delta''_j}\right\}, \text{ при } \Delta''_j < 0$$

отримується при декількох значеннях j, тобто при $t = t_{верхнє}$ декілька оцінок вільних змінних приймають нульові значення.

У такому випадку за розв'язуючий стовпчик можна прийняти будь-який (домовимося вибирати стовпчик з меншим номером).

В цьому випадку існує альтернативний оптимальний розв'язок на відрізку.

3. У розв'язуючому стовпчику, якому відповідає

$$\min\left\{\frac{-\Delta'_j}{\Delta''_j < 0}\right\}$$

нема жодного додатного коефіцієнта, тобто $Z \to \pm\infty$ (цільова функція задачі необмежена).

Визначимо відрізок, для якого оцінка $\Delta_j = \Delta'_j + t\Delta''_j$ залишається від'ємною.

Для цього розв'яжемо нерівність: $\Delta'_j + t\Delta''_j \le 0$

$$t \ge \frac{-\Delta'_j}{\Delta''_j} \quad \text{(за умовою } \Delta''_j < 0\text{)}$$

Оскільки параметр **t** зверху необмежений, то на всій частині заданого інтервалу для **t**, що залишилася, $Z \to \infty$, і розв'язування задачі завершено.

4. Може трапитись, що при $t = \alpha$ (ліва границя інтервалу) при пошуку оптимального розв'язку $Z \to \pm\infty$, тоді:

а) якщо при цьому $\Delta''_j < 0$ для розв'язуючого стовпчика, в якому всі елементи недодатні, то аналогічно попередньому випадку всюди $z \to \infty$ і розв'язування можна не починати.

б) якщо $\Delta''_j = 0$, то також $z \to \infty$ на всьому інтервалі (сумарна оцінка від'ємна).

в) якщо $\Delta''_j > 0$, а сумарна оцінка $\Delta_j = \Delta'_j + t\Delta''_j$, то можна визначити інтервал для t, в якому оцінка від'ємна:

$$\Delta'_j + t\Delta''_j \le 0$$

$$t \le -\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j} = t_{гр} \qquad (\Delta''_j \rangle 0)$$

Якщо $\alpha < t_{гр} < \beta$, то необхідно розв'язати задачу параметричного програмування на відрізку, який залишився $[t_{гр}; \beta]$.

Якщо ж $t_{гр} > \beta$, то розв'язок можна завершити, оскільки $Z \to \infty$ на всьому відрізку.

Різновидом параметричних задач є задачі, у яких присутні параметри як у виразі функції мети, так і у вільних членах системи обмежень одночасно та розподільчі задачі з параметрами.

Приклад 1.7.2.

Знайти $\max Z = (1+t)x_1 + (1-t)x_2$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 3$$

$$x_j \ge 0, (j = 1,2,3,4)$$

$$-\frac{1}{3} \le t \le 1$$

Розв'язок проводимо у відповідності з алгоритмом:

1. $t = -\frac{1}{3}$; (задаємо початкове значення параметра).

2. Записуємо у таблицю базисний опорний розв'язок і підраховуємо оцінки Δ'_j, Δ''_j та $\Delta_j = \Delta'_j + t\Delta''_j$, за заданим початковим значенням $t = -1/3$.

Таблиця 1.7.2

c_j		*(1+t)*	*(1-t)*	*(0+0·t)*	**СВ**
$c_i^б$	З \ Б	$-x_1$	$-x_2$	b	
0+0·t	x_3=	1	2	3	3/2
0+0·t	x_4=	2	1	3	3
Δ'_j		-1	-1	0	-
Δ''_j		-1	1	0	-
t=-1/3	Δ_j	-2/3	-4/3	0	-

3. Отриманий опорний план не є оптимальним, оскільки останній рядок симплексної таблиці містить від'ємні елементи. Відшукаємо оптимальний план, скориставшись симплексним методом.

$j^* = 2 \ (\Delta j^* = -4/3)$

$i^* = 1$ (симплексне відношення становить 3/2).

Таблиця 1.7.3

c_j		*(1+t)*	*(0+0·t)*	*(0+0)*	**СВ**
$c_i^Б$	З / Б	$-x_1$	$-x_3$	**b**	
1-t	$x_2=$	**1/2**	**1/2**	**3/2**	**3**
0+0·t	$x_4=$	**<u>3/2</u>**	**-1/2**	**3/2**	**1**
	Δ'_j	**-1/2**	**1/2**	**3/2**	
	Δ''_j	**-3/2**	**-1/2**	**-3/2**	
t=-1/3	Δ_j	**0**	**2/3**	**2**	

4. У табл. 1.7.3 отримано оптимальний розв'язок. Запишемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \Delta_1 = -1/2 - 3/2\,t \ge 0 \\ \Delta_3 = \ \ 1/2 - 1/2\,t \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3/2t \ge \ \ 1/2 \\ -1/2t \ge -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \le -1/3 \\ t \le \ \ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} t_{нижнє} = -\infty, \\ t_{верхнє} = -1/3 \end{matrix} .$$

Остаточно маємо: $-\infty \le t \le -1/3$.

5. З даної області вибираємо тільки одну точку: $t = -1/3$, як таку, що задовольняє початкові умови задачі. Виписуємо оптимальний розв'язок при $t = -1/3$:

$Z^* = 3/2 - 3/2 \cdot t = 2$;

$\overline{X}^* = (0, 3/2, 0, 3/2)$

6. Переходимо до знаходження наступного відрізка.

Якщо $t = -1/3$, то $\Delta_1 = 0$;

якщо $t = -1/3 + \varepsilon$, то $\Delta_1 < 0$, тобто записаний в таблиці розв'язок не буде оптимальним. Вибираємо розв'язуючий стовпчик: $j* = 1$.

7. Проводимо симплексне перетворення одноразового заміщення (табл.1.7.4) і отримаємо новий оптимальний розв'язок.

Таблиця 1.7.4

c_j		*(0+0·t)*	*(0+0·t)*	*(0+0·t)*	**СВ**
$c_i^б$	**З / Б**	$-x_4$	$-x_3$	**b**	
1+t	x_2=	**-1/3**	**2/3**	**1**	**3/2**
1-t	x_1=	**2/3**	**-1/3**	**1**	**-**
Δ'_j		**1/3**	**1/3**	**2**	**-**
Δ''_j		**1**	**-1**	**0**	**-**
t=-1/3	Δ_j	**0**	**2/3**	**2**	**-**

Знаходимо нову область зміни параметра ***t*** (п. 4):
Для цього побудуємо нерівності:

$$\begin{cases}\Delta_4 = 1/3 + 1t \ge 0 \\ \Delta_3 = 1/3 - 1t \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1/3 + t \ge 0 \\ 1/3 - t \ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t \ge -1/3 \\ t \le \ \ 1/3\end{cases} \Rightarrow$$

$$t_{нижнє} = -1/3$$

$$t_{верхнє} = \ \ 1/3$$

Отже, маємо новий інтервал для параметра ***t***:

$$-1/3 \le t \le 1/3.$$

Виписуємо оптимальний розв'язок на відрізку $[-1/3; 1/3]$ (п.5):

$$Z^* = 2 + 0 \cdot t = 2$$

$$\overline{X}^* = (1,1,0,0)$$

Переходимо до знаходження наступного відрізка, оскільки інтервал зміни параметра ще не вичерпаний.

При $t = 1/3$, $\Delta_3 = 0$. Коли $t > 1/3$, то $\Delta_3 < 0$ і розв'язок втрачає ознаки оптимальності.

Вибираємо розв'язуючий стовпчик $j* = 3$ і проводимо симплексне перетворення одноразового заміщення (п. 7).

Таблиця 1.7.5

c_j		*(0+0·t)*	*(1+t)*	*(0+0·t)*
$c_i^б$	З / Б	$-x_4$	$-x_2$	***b***
0+0t	$x_3=$	**-1/2**	**3/2**	**3/2**
1-t	$x_1=$	**1/2**	**1/2**	**3/2**
	Δ'_j	**1/2**	**-1/2**	**3/2**
	Δ''_j	**1/2**	**3/2**	**3/2**
t= -1/3	Δ_j	**2/3**	**0**	**2**

Оскільки в табл. 1.7.5 отримано оптимальний розв'язок, тому знову знаходимо нову область зміни параметра ***t*** (п. 4)

$$\begin{cases}\Delta_4 = \quad 1/2 + 1/2t \geq 0; \\ \Delta_2 = -1/2 + 3/2t \geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1/2 + 1/2t \geq 0; \\ -1/2 + 3/2t \geq 0\end{cases} \Rightarrow$$

$t_{нижнє} = 1/3$

$t_{верхнє} = +\infty$

Остаточно маємо інтервал для параметра ***t***: $1/3 \leq t \leq +\infty$

Випишемо оптимальний розв'язок на відрізку $[1/3;+\infty]$ (п. 5):

$$Z^* = 3/2 + 3/2t$$

$$\bar{x}^* = (3/2, 0, 3/2, 0)$$

Вся область зміни параметра ***t*** розділена на інтервали, для яких вказано оптимальний розв'язок і записані вирази залежності ***Z*** від параметра, тобто задача параметричного програмування розв'язана.

Графічне зображення залежності значення функції мети ***Z*** від параметра ***t*** наведене на рис.1.7.2.

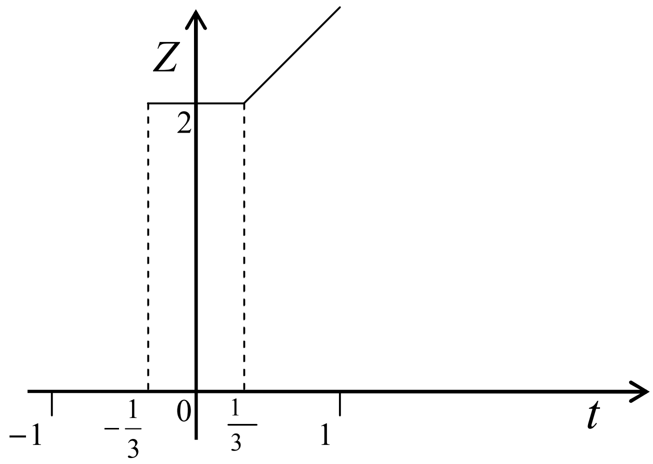


Рис.1.7.2. Графічна інтерпретація залежності значення функції мети від параметра

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 1

Завдання до 1.2. Лінійне програмування.
1.3. Двоїстість у лінійному програмуванні

Завдання № 1

Побудувати задачу лінійного програмування.

Завдання № 2

Розв'язати задачу графічним методом та виконати аналіз отриманого розв'язку.

Завдання № 3

Розв'язати задачу симплексним методом. Проаналізувати розв'язок.

Завдання № 4

Побудувати задачу, подвійну до заданої та розв'язати її. Проаналізувати розв'язок.

Завдання № 5

Побудувати задачу, подвійну до заданої. Маючи розв'язок прямої (вихідної) задачі, записати розв'язок подвійної. Проаналізувати розв'язок.

Задача оптимального використання виробничих ресурсів

Економічна постановка задачі. Припустимо, що підприємство виробляє два види продукції $\boldsymbol{P_1}$ та $\boldsymbol{P_2}$. Продукція обох видів надходить в оптовий продаж. Для виробництва використовуються три види ресурсів (сировини) $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ та $\boldsymbol{R_3}$.
Прибуток від реалізації одиниці продукції та нормативи витрат сировини наведені в таблиці.

Яку кількість продукції кожного виду підприємство повинно виробляти, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним?

Умови задачі щодо використання ресурсів задаються за варіантами:

Варіант 1

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	4	4	16
R_2	6	8	48
R_3	8	3	24
Прибуток, грош.од.	14	70	

Варіант 2

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	6	8	48
R_2	1	8	8
R_3	6	4	24
Прибуток, грош.од.	55	66	

Варіант 3

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	8	5	40
R_2	4	5	20
R_3	4	2	8
Прибуток, грош.од.	41	31	

Варіант 4

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	2	5	10
R_2	5	1	5
R_3	4	1	4
Прибуток, грош.од.	24	77	

Варіант 5

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	5	4	20
R_2	7	1	7
R_3	3	3	9
Прибуток, грош.од.	73	74	

Варіант 6

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	3	8	24
R_2	5	7	35
R_3	6	1	6
Прибуток, грош.од.	63	72	

Варіант 7

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	8	4	32
R_2	4	5	20
R_3	8	5	40
Прибуток, грош.од.	60	31	

Варіант 8

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	5	5	25
R_2	2	3	6
R_3	2	4	8
Прибуток, грош.од.	77	49	

Варіант 9

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	5	5	25
R_2	2	4	8
R_3	2	3	6
Прибуток, грош.од.	58	78	

Варіант 10

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	2	8	16
R_2	5	4	20
R_3	2	5	10
Прибуток, грош.од.	49	72	

Варіант 11

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	4	5	20
R_2	7	5	35
R_3	8	4	32
Прибуток, грош.од.	30	39	

Варіант 12

Вид ресурсу	Вид продукції		Обсяг ресурсу
	P_1	P_2	
R_1	3	6	18
R_2	5	2	10
R_3	3	8	24
Прибуток, грош.од.	64	55	

Завдання до 1.4. Транспортна задача

Знайти оптимальний розв'язок транспортної задачі, якщо відомі: вектор запасу вантажу у постачальників (пункти виробництва) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m)$; вектор потреб споживачів $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ... , \boldsymbol{b}_n)$ та матриця витрат на перевезення вантажу $\boldsymbol{c}_{ij}$.

Варіант 1
$\boldsymbol{a}_i = (8; 10; 5);$
$\boldsymbol{b}_j = (5; 5; 10);$

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 2
$\boldsymbol{a}_i = (8; 7; 6);$
$\boldsymbol{b}_j = (7; 10; 4);$

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіант 3
$\boldsymbol{a}_i = (15; 8; 5; 17);$
$\boldsymbol{b}_j = (10; 20; 15);$

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 4
$\boldsymbol{a}_i = (10; 20; 40);$
$\boldsymbol{b}_j = (5; 10; 50);$

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 5
$\boldsymbol{a}_i = (30; 30; 60);$
$\boldsymbol{b}_j = (25; 25; 40; 30);$

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 6
$\boldsymbol{a}_i = (160; 80; 60);$
$\boldsymbol{b}_j = (60; 50; 40; 40; 110);$

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Варіант 7
$\boldsymbol{a_i}$ = (5; 20; 10);
$\boldsymbol{b_j}$ = (10; 25; 15);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Варіант 8
$\boldsymbol{a_i}$ = (30; 40; 20);
$\boldsymbol{b_j}$ = (15; 20; 25; 30);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

Варіант 9
$\boldsymbol{a_i}$ = (30; 40; 50);
$\boldsymbol{b_j}$ = (35; 30; 55);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Варіант 10
$\boldsymbol{a_i}$ = (10; 20; 80; 50);
$\boldsymbol{b_j}$ = (30; 10; 60; 60);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Варіант 11
$\boldsymbol{a_i}$ = (10; 20; 80);
$\boldsymbol{b_j}$ = (30; 10; 60; 10);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Варіант 12
$\boldsymbol{a_i}$ = (40; 20; 50);
$\boldsymbol{b_j}$ = (20; 45; 35; 40);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Варіант 13
$\boldsymbol{a_i}$ = (10; 80; 15);
$\boldsymbol{b_j}$ = (75; 20; 50);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Варіант 14
$\boldsymbol{a_i}$ = (80; 40; 60; 40);
$\boldsymbol{b_j}$ = (70; 60; 80);

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Завдання до 1.5. Постановка задач цілочислового програмування

Завдання до розділу виконувати відповідно варіантів задачі до 1.2, 1.3 при умові цілочисельності змінних.

Завдання до 1.7. Задачі лінійного програмування з параметрами

Завдання №1.

Розв'язати задачі з параметром у цільовій функції:

1.1.

$$\min Z = t x_1 + 2 x_2$$
$$2 x_1 + x_2 \geq 6$$
$$- x_1 + 3 x_2 \leq 11$$
$$3 x_1 - 2 x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$-\infty \leq t \leq +\infty$$

1.2.

$$\max Z = 4 x_1 + 3 t x_2$$
$$x_1 + 3 x_2 \geq 10$$
$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 26$$
$$- x_1 - 3 x_2 \leq 2$$
$$2 x_1 - 3 x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$-\infty \leq t \leq +\infty$$

1.3.

$$\max Z = 2 x_1 + (1 - t) x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$- x_1 + 2 x_2 \leq 2$$
$$x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$-10 \leq t \leq 2$$

1.4.

$$\max Z = 2 x_1 + (1 - t) x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$- x_1 + 2 x_2 \leq 2$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$0 \leq t \leq +\infty$$

1.5.

$$\min Z = (2 - t) x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$- x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$3 \leq t \leq 100$$

1.6.

$$\max Z = (2 - t) x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$- x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$0 \leq t \leq 3$$

1.7.

$\min Z = 2x_1 + (1-t)x_2$

$x_1 + x_2 \le 2$

$-x_1 + 2x_2 \le 5$

$x_1 - x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

$2 \le t \le +\infty$

1.8.

$\max Z = (2+t)x_1 - x_2$

$x_1 + x_2 \le 2$

$-x_1 + 2x_2 \le 5$

$x_1 - x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

$0 \le t \le 10$

1.9.

$\max Z = x_1 + (2-t)x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4$

$-x_1 + x_2 + x_3 \le 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

$0 \le t \le 20$

1.10.

$\max Z = (1+t)x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 - x_3 \le 5$

$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

$1 \le t \le +\infty$

Завдання №2.

Розв'язати транспортні задачі з параметром у цільовій функції.

Коефіцієнти транспортних витрат наведені в таблиці.

Спож. / Постач.	1	2	3	4	5	6	Запаси
1	1+t	12-t	2t	1+2t	3t-2	t	A_1
2	2	1+t	2t+1	8-t	4-t	2+t	A_2
3	t+1	4-t	6-t	t+2	2t-1	3	A_3
Потреби	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	-

2.1.

Ресурси: $A_1 = 100;\ A_2 = 120;\ A_3 = 80$

Потреби: $B_1 = 20;\ B_2 = 140;\ B_3 = 60;\ B_4 = 80$

Інтервал для параметра: $0 \le t \le 2$

2.2.

Ресурси: $A_1 = 50;\ A_2 = 25;\ A_3 = 75$

Потреби: $B_1 = 20;\ B_3 = 30;\ B_5 = 30;\ B_6 = 70$

Інтервал для параметра: $1 \le t \le 3$

2.3.

Ресурси: $A_1 = 120;\ A_2 = 30;\ A_3 = 50$

Потреби: $B_1 = 20;\ B_2 = 80;\ B_5 = 75;\ B_6 = 25$

Інтервал для параметра: $1 \le t \le 3$

2.4.

Ресурси: $A_1 = 200;\ A_2 = 100;\ A_3 = 300$

Потреби: $B_1 = 150;\ B_2 = 50;\ B_3 = 200;\ B_4 = 200$

Інтервал для параметра: $0 \le t \le 3$

РОЗДІЛ 2. ПРИКЛАДНЕ ВИКОРИСТАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Моделювання, як метод наукового пізнання, почали застосовувати в дослідженнях ще з глибокої давнини. Поступово воно охоплювало все ширше коло наукових знань: технічне конструювання і будівництво, фізику і хімію, біологію, суспільні науки, тобто від вивчення найпростіших фізичних явищ до складних соціально-економічних процесів.

Особливо широкого поширення моделювання набуло в XVII – XVIIIст., в епоху розквіту теоретичної механіки. У XIX ст. інтерес до моделювання зменшився і відродився знову в першій половині XX століття. У наш час важко назвати дослідження, де б не застосовувалось моделювання.

Проте методологія моделювання довгий час розвивалася незалежно в окремих науках, і це не сприяло розробці єдиної термінології, системи понять і категорій, їх визначенню. Широке застосування принципів моделювання сприяло усвідомленню ролі моделювання як універсального методу наукового пізнання, важливої гносеологічної категорії.

Під ***моделюванням*** розуміють процес побудови, вивчення і застосування моделей. Термін *"**модель**"* походить від латинського слова "modulus", що означає міра, мірило, зразок, норма. У загальному випадку під моделлю розуміють деякий зразок, аналог, подібність якого-небудь об'єкта, явища.

Логіки називають моделлю логічні схеми побудови, математики – систему символів і знаків, за допомогою яких описаний об'єкт або процес, медики – картину захворювання, спортсмени – тактичні схеми проведення гри тощо.

Такі різні підходи до трактування цього терміну не дають єдиного означення. Проте у загальному вигляді ***під моделлю можна розуміти образ реального об'єкта (процесу) в матеріальній чи ідеальній формах, що відображає суттєві властивості модельного об'єкта (процесу) і заміщує його в ході дослідження та управління***.

Матеріальні моделі бувають ***фізичні***, наприклад, глобус – модель Землі і ***технологічні***, наприклад, модель процесу виготовлення палива в лабораторних умовах. Тобто такі моделі можна побачити, відчути .

Ідеальні (абстрактні) моделі відображають явище або процес за допомогою знаків та символів і певною мовою, наприклад, за допомогою мови математики. Прикладом є ***економіко-математичні моделі***, тобто такі, які відображають економічні процеси та явища за допомогою мови математики.

Метод моделювання ґрунтується на принципі ***аналогії***, тобто можливості вивчення реального об’єкта не безпосередньо, а за допомогою відповідного йому аналога – моделі і перенесення здобутих у ході дослідження знань на об’єкт-оригінал.

Необхідність використання методу моделювання замість дослідження реального об’єкта, явища або процесу зумовлена такими причинами:

1) моделі значно простіші для дослідження, ніж самі об’єкти дослідження, наприклад економіка країни;

2) часто об’єкти дослідити безпосередньо неможливо з різних причин: вони або недосяжні, наприклад, глибини Всесвіту, або ще реально не існують, наприклад, майбутній стан економіки;

3) дослідження іншими методами вимагає багато часу і коштів.

У подальшому будемо розглядати лише економіко-математичні моделі.

Однак оскільки модель – це своєрідний інструмент для пізнання, який дослідник ставить між собою та об’єктом, і за допомогою якого вивчає цей об’єкт, то і суть моделювання полягає в тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об’єктів-замінників. Отже, ***модель*** – це такий матеріально або уявно зображуваний об’єкт, який у процесі дослідження заміщує об’єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про об’єкт-оригінал. Отже головна особливість моделювання полягає не тільки в тому, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об’єктів-замінників, але і метод, що передбачає можливість перенесення отриманих у процесі дослідження результатів з моделі на об’єкт.

Процес моделювання передбачає наявність трьох основних елементів: 1) суб’єкта (дослідника); 2) об’єкта дослідження; 3) моделі, як інструменту пізнання, що опосереднює відношення суб’єкта, що пізнає, і об’єкта, який пізнають.

Практичними завданнями економіко-математичного моделювання є:

1) аналіз економічних об’єктів і процесів;
2) економічне прогнозування;
3) підтримка прийняття управлінських рішень.

Проте, говорячи про практичну цінність та ефективність економіко-математичного моделювання мають на увазі, по-перше, поняття **адекватності** моделі реальному об’єкту, тобто відповідність тим властивостям, які вважаються суттєвими для дослідника, відповідають меті дослідження та прийнятій системі гіпотез. По-друге, це певна відповідність отриманих у процесі дослідження моделі результатів поведінці аналогічних реальних економічних систем.

У свою чергу економіко-математичні моделі теж класифікують за різними ознаками: характером об'єктів моделювання, сферами застосування, глибиною моделювання тощо.

Зупинимося на класифікації математичних моделей, що застосовуються в дослідженні економічних систем. За характером, тобто за засобами моделювання, методи моделювання ділять на дві групи: матеріальні (предметні) і ідеальні. Відповідно вся множина моделей також ділиться на два великих класи: ***матеріальні (предметні) та ідеальні (уявні).***

Матеріальні моделі втілені в деяких матеріальних об’єктах, що мають природне або штучне походження, і відтворюють основні геометричні, фізичні, динамічні і функціональні характеристики об’єкта дослідження. В їх класі виділяють моделі фізичні і предметно-математичні. Фізичне моделювання має місце в тому випадку, коли об’єкт моделювання і модель мають одну і ту ж фізичну природу. Фізичне моделювання і моделі особливо поширені в технічних науках.

Другий клас – ***ідеальні (уявні) моделі*** – є продуктом людського мислення. Тут процес моделювання засновується на аналогії ідеальній, уявній. Операції з такими моделями здійснюються в свідомості людини.

Ідеальне моделювання можна розбити на два підкласи: знакове та інтуїтивне. Знакові моделі – це знакові утворення будь-якого вигляду: схеми, графіки, креслення, формули тощо, тобто в знакових моделях використовується певна формалізована мова. Якщо такою мовою є мова математики і логіки, то мова йде про найважливіший вигляд знакових моделей, а саме, логіко-математичних. Математичні моделі ще визначають як систему математичних відношень і логічних виразів (функцій, рівнянь, нерівностей, алгоритмів тощо), що відображають істотні властивості об’єкта дослідження.

При інтуїтивному моделюванні не використовується чітко фіксована знакова система. Таке моделювання зустрічається там, де неможлива формалізація або пізнавальний процес перебуває ще в початковій стадії.

Протягом довгого часу інтуїтивне моделювання, наприклад, було головним методом економічного аналізу та управління. У випадках інтуїтивних моделей, основаних на особистому досвіді людини, що приймає рішення, не виключені помилки, оскільки різні люди посвоєму можуть сприймати інтуїтивну модель і на її основі робити різні висновки.

У широкому розумінні (і суворо формально) предметно-математичне і логіко-математичне моделювання утворюють математичне моделювання – метод дослідження, заснований на аналогії процесів і явищ, різних за своєю природою, але таких, що описуються однаковими математичними залежностями.

На першому етапі дослідження за допомогою моделювання здійснюється конструювання або ж знаходження в реальному світі іншого об’єкта B, що є моделлю об'єкта A. На цьому етапі передбачається наявність деяких знань про об’єкт-оригінал, які і дозволяють відобразити його істотні риси в моделі. Проте модель - це не тотожність з оригіналом, але і не надмірна в усіх істотних відносинах відмінність від оригіналу.

Модель заміняє оригінал лише в суворо обмеженому значенні. Тому вивчення одних сторін об’єкта, що моделюється, здійснюється ціною відмови від дослідження інших сторін. Отже, важливим для практики моделювання є твердження про можливість побудови безлічі моделей, що характеризують об’єкт з різних сторін і з різною мірою деталізації.

Після того, як модель побудована, проводять так звані “модельні” експерименти, тобто зміну умов функціонування моделі для отримання даних про її “поведінку”. Таким чином, на цьому етапі модель сама виступає об’єктом дослідження, а результатом є множина (сукупність) знань про модель.

На наступному етапі передбачається перенесення отриманої сукупності знань про модель на об’єкт-оригінал. При цьому важливим є коректування знань, які переносяться з урахуванням властивостей оригіналу, що не знайшли відображення в моделі, або ж характеристик об’єкта, змінених при побудові моделі. Результатом цього етапу моделювання є формування множини знань про об’єкт-оригінал.

Останній етап моделювання передбачає практичну перевірку отриманих знань і їх використання для перетворення або управління об’єктом дослідження. Якщо таке управління або перетворення неможливе через недостатність знань про закономірності поведінки об’єкта, то процес повторюється на вищому, з точки зору деталізації в моделі характеристик об'єкта, рівні. Отже, моделювання - процес циклічний.

Математичне моделювання знаходить широке впровадження у всіх галузях наукових досліджень. Особливе положення займає математичне моделювання в економічних дослідженнях.

Математика широко застосовувалася в економічних дослідженнях завжди. Проте розвиток математичного моделювання відкрив нові можливості в імітуванні та вивченні найрізноманітніших економічних процесів і явищ. Більше того, застосування математичного моделювання має ряд істотних переваг у порівнянні з традиційними методами економічного дослідження.

Створення аналогів реальних систем і процесів за допомогою математичних моделей, по-перше, полегшує проведення економічних розрахунків та аналізу, по-друге, сприяє проведенню дослідження і у випадках неможливості застосування традиційних методів. Перевагою математичного моделювання є і те, що для перевірки якого-небудь теоретичного припущення не обов'язково вдаватися до експерименту, який вимагає багато часу і коштів.

Таким чином, вивчення на прикладі математичної моделі економічного явища або процесу дозволяє "експериментувати" в економіці, не вдаючись до досліду. Обґрунтування найвигіднішого варіанта організації виробництва або використання виробничих ресурсів за допомогою математичних моделей та ПК забезпечують отримання оптимальних варіантів при істотно менших витратах зусиль, часу та коштів.

При вивченні економічних процесів або явищ за допомогою математичного моделювання, закономірності та їх взаємозв'язки описуються математичними рівняннями, які характерні для реальних об'єктів. Тобто, в цьому випадку конструюється економіко-математична модель.

Під ***економіко-математичною моделлю*** розуміють ***концентрований вираз найсуттєвіших взаємозв'язків і закономірностей процесу функціонування економічної системи в математичній формі***.

Не варто ототожнювати економіко-математичне моделювання і дослідження за допомогою методів моделювання. Саме по собі моделювання може розглядатися як процес створення або конструювання економіко-математичної моделі, адекватної об'єкту вивчення. Моделювання ще не передбачає проведення розрахунків по даній моделі, воно може носити чисто теоретичний характер. У той же час проведення дослідження за допомогою методів моделювання передбачає не тільки конструювання моделі, але і використання її для проведення «модельних» розрахунків. Цей процес досить складний і передбачає послідовне виконання ряду взаємопов'язаних робіт, які можна об'єднати в певні етапи.

Проте для кожної досліджуваної проблеми ці етапи можуть мати своє конкретне втілення. Використання правильної методики суттєво підвищує ймовірність уникнення невірно сформульованої задачі дослідження, а також можливості невірного розв'язання правильно поставленої задачі. Це в свою чергу забезпечує адекватність моделі меті дослідження, а при впровадженні результатів – очікувану ефективність.

Вивчення економічного процесу та об'єкта моделювання

Перед моделювання економічного процесу його детально вивчають, використовуючи для цього різні джерела, а при можливості і в натурі. З'ясовують зовнішні і внутрішні зв'язки економічного процесу, умови функціонування економічних систем, виясняють, яке місце в ієрархічній структурі займає процес, що вивчається, на який період він повинен бути змодельований. Тобто знання про досліджуваний процес не повинні обмежуватися загальними положеннями.

Кількісні зв'язки і відносини є відображенням якісної природи економічних систем і процесів, тому математичне моделювання передбачає попередній глибокий якісний аналіз умов функціонування економічної системи, виявлення всієї множини чинників, що її визначають; дослідження взаємозв'язків і взаємного впливу цих чинників і умов.

Лише уважне вивчення економічної системи, включаючи і історичний аспект, технологічних процесів виробництва, природно-економічних умов функціонування виробничих систем та існуючих проблем дасть змогу досліднику правильно побудувати концепцію моделювання та здійснити коректну постановку економіко-математичної задачі.

Постановка економіко-математичної задачі

Якщо правомірно визначати значимість кожного з етапів, то цей етап потрібно поставити на перше місце. Вирішальне значення для математичного моделювання економічних задач має коректна їх постановка. Найдосконаліші математичні методи та електроннообчислювальні машини не забезпечать бажаного результату, якщо задача не буде чітко сформульована і коректно поставлена.

Головне на цьому етапі – правильно сформулювати суть проблеми, цілі дослідження, припущення, які приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповідь, тобто визначити:

а) що відомо про об'єкт;

б) що є невідомим;

в) за яких умов відшукуються невідомі величини;

г) яка ставиться мета.

На цьому етапі враховують найважливіші риси і властивості об'єкта, що моделюється і абстрагуються від другорядних; вивчають структуру об'єкта та головні залежності, що поєднують його елементи; формують гіпотези (попередні), що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта.

Ясність і чіткість формулювання задачі є тією умовою, за якою розв'язання її приведе до коректних результатів.

Вибір базової економіко-математичної моделі, формалізація умов та цільової функції задачі

Для великого кола задач в аграрній сфері виробництва вже побудовані типові математичні моделі. Досліднику часто залишається лише зрозуміти, яка з відомих моделей найбільш придатна для аналізу проблем, що його цікавлять, і адаптувати її до задачі, що розв'язується.

Якщо такої моделі немає, то необхідно її побудувати, тобто здійснити математичну інтерпретацію економіко-виробничої системи, виразити економічну проблему у вигляді конкретних математичний залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). Спочатку визначається основна конструкція математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (перелік змінних і параметрів, форма залежності).

У процесі побудови моделі необхідно прагнути до того, щоб вона належала до добре вивченого класу математичних задач (методів). Процес переходу від реального об'єкта з притаманними йому властивостями, зв'язками, як всередині самого об'єкта, так і поза ним, до моделей, у значній мірі визначається досвідом та інтуїцією фахівця в даній конкретній області і є складним етапом застосування математичного апарата в економічних дослідженнях. У той же час можна відмітити ряд загальних вимог до економіко-математичних моделей: достатня ***точність***, гранична ***простота*** і ***наочність, типовість і специфічність***.

Достатня ***точність*** моделі означає, що при ідеалізації реального об’єкта враховані всі істотні властивості та зв’язки, а неістотні, тобто другорядні, виключені з моделі. У той же час, як свідчить практика економіко-математичного моделювання, залежно від характеру об’єкта і поставленої задачі доцільно будувати в ряді випадків декілька різноаспектних моделей. При цьому кожна модель виділяє певні сторони об’єкта, інші ж можуть враховуватися приблизно або агреговано. Таке застосування різноаспектних моделей дозволяє вирішити різні задачі дослідження.

Важливою вимогою є ***наочність і простота*** моделі. Модель повинна бути досить простою, оскільки подальша робота з переобтяженою неістотними чинниками і характеристиками моделлю не тільки складна, але іноді і практично неможлива.

При моделюванні доцільно починати дослідження на основі найпростіших моделей, поступитися точністю в інтересах простоти, щоб проаналізувати хоча б деякі з проблем. Потім перейти до складніших моделей, що дозволить проаналізувати та уточнити результати, отримані на простих моделях. Однак завжди необхідно пам'ятати, що спрощення моделі допустиме лише в тих межах, в яких вона ще відображає істотні властивості реального об’єкта. Звичайно, все це не означає, що завжди і скрізь необхідно використовувати тільки найпростіші моделі. Якщо з їх допомогою не отримані бажані результати, моделі потрібно поступово ускладнювати.

Представляючи реальний об'єкт з достатньою точністю і, за можливістю, просто, необхідно в той же час домагатися ***типовості*** і ***специфічності*** моделі.

Типовість моделі – це можливість її застосування для вивчення аналогічних об’єктів або процесів. Але оскільки жоден процес у чистому вигляді не повторюється, як і немає абсолютно однакових об’єктів, то модель повинна враховувати специфіку процесу (об’єкта). Це і визначає ***специфічність*** моделі.

Вибір математичного методу розв’язання задачі

Після того, як математична модель побудована, подальша робота полягає в застосуванні відповідних математичних методів з метою отримання необхідних характеристик даної моделі, а отже, і реального об’єкта дослідження.

Вибір числових методів вимагає високого фаху виконавців та адекватності обраних методів розбудованій математичній моделі. При виборі числового методу часто виникає питання: мати можливість знайти точний розв'язок спрощеної математичної моделі або наближений для сформульованої досить повно моделі?

Практика свідчить, що розрахунки за моделлю, в якій враховані в більшому обсязі основні взаємозв'язки, характеристики і фактори більш ефективні.

Велику різноманітність математичних методів можна звести до трьох основних видів: ***аналітичних, графічних і чисельних.***

За допомогою ***аналітичних*** методів з'являється можливість перш за все провести дослідження в загальному вигляді, незалежно від чисельних параметрів системи. Отримані характеристики моделі в аналітичній формі і виявлені аналітичні залежності дозволяють використовувати інші методи, наприклад, методи оптимізації, та отримати співвідношення, що характеризують поведінку системи при зміні її параметрів. Проте через громіздкість аналітичних виразів або неможливість їх отримання, складність розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих порядків, аналітичні методи математики застосовуються лише для найпростіших моделей.

Графічні методи наочні, зручні, якщо не вимагається висока точність або інтерес становить якісна картина процесів. В економіці графічні методи найчастіше використовуються при статистичній обробці результатів спостережень. Проте вони обмежені можливостями побудов на площині або в трьохвимірному просторі – і тому можуть бути застосовані лише для простих моделей.

Особливістю ***чисельних*** методів є те, що схема обчислень задається формулою або точним алгоритмом про послідовність дій, виконання яких приводить до бажаного результату.

Нині розроблена велика кількість обчислювальних процедур, що обслуговують різноманітні задачі дослідження, а з розвитком обчислювальної техніки чисельні методи стали незамінним засобом при вивченні економічних явищ та процесів.

В економіці найбільший інтерес і поширення отримали методи математичного програмування: лінійного, нелінійного, цілочислового, динамічного та інші. Проте найбільше практичне застосування отримало лінійне програмування.

Під методами ***лінійного програмування*** мають на увазі такі математичні методи, які дозволяють вирішувати економічні задачі, умови яких виражені у вигляді системи лінійних співвідношень, а цільова установка – у вигляді лінійної функції.

Визначення економіко-математичної моделі як концентрованого виразу закономірностей і взаємозв'язків економічного явища в математичній формі передбачає використання математичних символів і знаків для побудови моделі. І хоча при побудові економіко-математичних моделей допускається довільна система позначень, все ж необхідно дотримуватись загальноприйнятих вимог. Наведемо найбільш загальні символи і позначення, що застосовуються при конструюванні економіко-математичної моделі:

$=$ – дорівнює;

$\leq$ – менше або дорівнює (не перевищує);

$\geq$ – більше або дорівнює (не менше);

$\in$ – належить, тобто приналежність частини загальному, наприклад, якщо множина A складається з різноманітних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то записується так: $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Приналежність елемента множині записується так:

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A, \ldots, a_n \in A \quad \text{або} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

Якщо b не є елементом множини A, то записується - $b \notin A$.

Σ – знак суми. Якщо записано $\sum\limits_{i=1}^{m}$, то це сума, в якій i змінюється від 1 до m;

$\Sigma\Sigma$ – позначення подвійної суми. Якщо записано $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n}$, то перша сума змінюється по i від 1 до m, а друга – по j від 1 до n;

$f(\,)$ – позначення функції, наприклад, $y=f(x)$ – читається; y є функція від x;

i, j, l, r – позначення індексів змінних і постійних величин;

x_i, y_j, x_{ij} – позначення невідомих величин;

a_i, d_{ij}, c_{ijk} – позначення коефіцієнтів витрат ресурсів або виходу продукції;

R_i, B_i, b_i – ресурси (обсяги обмежень задачі);

max – позначення максимуму;

min – позначення мінімуму;

$\to min(max)$ – прямує до мінімуму (максимуму).

У всіх випадках, якщо вводяться додаткові позначення, символи, знаки, використовують відповідні пояснення.

Математична модель задачі, що розв'язується симплексним методом лінійного програмування, в загальній формі включає:

1) лінійну форму змінних або цільову функцію, що виражає цільову установку задачі:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr,$$

2) обмеження змінних у вигляді системи лінійних нерівностей або рівнянь, що формують умови задачі:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ (i=1,...,k);$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j \ge R_i, \ (i=k+1,...,r);$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = B_i, \ (i=r+1,...,m),$$

3) умови невід'ємності всіх змінних величин, включених у задачу:

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,\dots,n) \ .$$

Прийняті позначення:

n	–	загальна кількість змінних величин;
j	–	порядковий номер змінної;
i	–	порядковий номер обмеження;
m	–	загальна кількість обмежень;
$i=1,\dots,k$	–	обмеження щодо використання ресурсів;
$i=k+1,\dots,r$	–	обмеження щодо гарантованого обсягу виробництва;
$i=r+1,\dots,m$	–	обмеження щодо фіксованого обсягу виробництва;
a_{ij}	–	норма витрат i-го виду ресурсу на одиницю виробництва по j-му виду діяльності;
v_{ij}	–	обсяг виробництва продукту i-го виду у розрахунку на одиницю j -го виду діяльності;
b_i	–	обсяг i -го виду виробничих ресурсів;
R_i	–	запланований обсяг виробництва продукту i-го виду;
B_i	–	фіксований обсяг виробництва продукту i-го виду;
c_j	–	оцінка змінної в цільовій функції у розрахунку на одиницю виробництва по j-му виду діяльності;
x_j	–	невідома (змінна) величина, що означає розмір j-го виду діяльності.

Представлена форма запису умов і цільової функції задачі компактна, зручна. Це так звана ***структурна*** модель задачі. У ***розгорнутому*** вигляді кожна умова задачі представлена окремим лінійним співвідношенням, а цільова установка – лінійною функцією:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \rightarrow extr$$

при умовах:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k; \\
\\
v_{k+1,1}x_1 + v_{k+1,2}x_2 + ... + v_{k+1,n}x_n \ge R_{k+1}; \\
v_{k+2,1}x_1 + v_{k+2,2}x_2 + ... + v_{k+2,n}x_n \ge R_{k+2}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_{r1}x_1 + v_{r2}x_2 + ... + v_{rn}x_n \ge R_r; \\
\\
v_{r+1,1}x_1 + v_{r+1,2}x_2 + ... + v_{r+1,n}x_n = B_{r+1}; \\
v_{r+2,1}x_1 + v_{r+2,2}x_2 + ... + v_{r+2,n}x_n = B_{r+2}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_{m1}x_1 + v_{m2}x_2 + ... + v_{mn}x_n = B_m.
\end{array}$$

Умови невід'ємності змінних:

$$x_j \ge 0, \quad (j = 1,2,\dots,n) \ .$$

Застосування методів лінійного програмування в економіці та аграрній сфері виробництва передбачає, що на кожну одиницю витрат ресурсів, які є в розпорядженні виробництва, отримують рівну кількість продукції та між функцією і аргументом існує лінійна залежність.

Насправді, в економічних процесах майже немає лінійних залежностей. Проте в практиці планування та економічного аналізу традиційними методами в більшості випадків така залежність допускається. Це ж знаходить своє відображення і при складанні балансів.

Переваги оптимізаційних методів дослідження сприяють практичному застосуванню методів лінійного програмування, яке виправдане також тим, що більшість нелінійних залежностей можна звести до лінійних. Широке впровадження саме лінійно-оптимізаційних моделей у той же час пояснюється існуванням універсального методу розв’язку таких задач – симплексного та доступного і простого аналізу отриманих розв’язків.

Інформаційна характеристика моделі

Математичне моделювання економічних процесів пов’язане з проблемою забезпечення економічною інформацією. Формування даних для числової економіко-математичної задачі включає визначення обсягу і структури інформації, її збирання, оцінку і попередню обробку (переробку).

Обсяг і структура інформації визначаються змістом задачі та математичним методом, за допомогою якого вона буде розв’язуватись.

Збір інформації передбачає її фіксацію, накопичення і зберігання з подальшою обробкою та переробкою. Результатом останнього є техніко-економічні коефіцієнти (ТЕК), що представляють інформацію до задачі.

Отримана інформація повинна відповідати ряду важливих вимог: ***достовірність, достатність, доступність, однозначність***.

Достовірність інформації означає точність характеристики процесу або явища (об'єкта дослідження). Досягається вона своєчасністю, безперервністю та однократністю її реєстрації.

Достатність інформації - це такий її обсяг, що дозволяє з потрібною мірою повноти характеризувати об’єкт. На практиці прагнуть до того, щоб повнота характеристики об’єкта досягалася при невеликих обсягах інформації.

Доступність інформації досягається тим, що вона нагромаджується у такому вигляді, в якому її легко відтворити, сприйняти та обробити.

Однозначність інформації означає в кожному випадку єдине тлумачення і не допускає різночитання.

Загальною і важливою якістю інформації є також її **оперативність**, тобто своєчасність отримання.

Інформація, що використовується при розв’язанні лінійно-оптимізаційних задач, представляється у вигляді матриці техніко-економічних коефіцієнтів (ТЕК) типу витрати-випуск, векторів обмежень і коефіцієнтів цільової функції (оцінок змінних). Ці дані називають інформаційною характеристикою задачі. Вони необхідні для складання числової економіко-математичної моделі, розробка якої здійснюється на наступному етапі.

Детальніше про матричне представлення задачі і розробку її елементів буде сказано нижче.

Побудова числової економіко-математичної моделі задачі

Побудова числової економіко-математичної моделі є підсумком всієї підготовчої роботи дослідження за допомогою математичного моделювання. Що ж потрібно розуміти під числовою економіко-математичною моделлю?

Числова економіко-математична модель – це таке представлення задачі, в якому мета задачі виражена у вигляді цільової функції, а умови – у вигляді алгебричних рівнянь і нерівностей з числовими коефіцієнтами при невідомих.

Таким чином, числова економіко-математична модель відрізняється від розгорнутої математичної моделі конкретністю кількісного представлення об'єкта-оригіналу. Чітко встановлена послідовність виконання робіт на цьому етапі сприяє уникненню помилок і тим самим скороченню часу і зусиль на розв'язання задачі. Ця послідовність може бути різною, однак, практика свідчить про доцільність таких кроків:

1) визначити перелік змінних, які характеризують основні невідомі задачі відповідно до видів виробничої діяльності;
2) встановити склад і обсяги обмежень;
3) розробити техніко-економічні коефіцієнти (ТЕК) типу витрати-випуск за всіма видами і способами виробничої діяльності;
4) з урахуванням мети задачі сформулювати (обґрунтувати) критерій оптимізації і побудувати цільову функцію.

Деталізуємо названі кроки.

Визначення переліку змінних

Склад видів і способів виробничої діяльності, що виражаються змінними, залежить від суті сформульованої задачі та міри деталізації процесу, що моделюється. Види діяльності представляють неподільні операції в моделі економічного процесу, які відрізняються один від одного за ресурсами, що використовуються і коефіцієнтами їх витрат, виходом продукції та коефіцієнтами її випуску, способами і часом використання кінцевої продукції.

Відмінність видів діяльності (за призначенням; ресурсами, що використовуються; кількістю та якістю продукції, яку отримують за технологічною схемою і т.п.) є передумовою багатоваріантності стану системи.

При визначенні переліку змінних у моделі необхідно враховувати їх відмінність за економічним значенням. Залежно від того, що означають змінні та яка їх роль при формалізації задачі, розрізняють ***основні, додаткові і допоміжні*** змінні.

Основні змінні відображають основні види діяльності, об’єкти, продукцію тощо. Так, залежно від мети планування або економічного аналізу, основними змінними позначаються сільськогосподарські галузі (перелік яких встановлюється виходячи з постановки задачі), види продукції, розміри основних засобів виробництва, оборотні засоби виробництва тощо.

Додаткові змінні вводяться в задачу, як правило, для полегшення формалізації її умов. Залежно від постановки задачі вони можуть виражати приріст врожайності сільськогосподарських культур, зміну продуктивності худоби тощо. Додаткові змінні вводять також для перетворення нерівностей у рівняння. Так, якщо нерівність типу **(≥)** , то додаткові змінні означають перевищення лівої частини над правою частиною нерівності (наприклад, перевищення запланованого обсягу виробництва).

Допоміжні змінні вводяться в задачу з метою математичних перетворень при її записі або розв’язку. Наприклад, допоміжні змінні включають у задачу для визначення розрахункових величин (виробничих ресурсів, які можна придбати, показників економічної ефективності виробництва тощо) .

Змінні можуть бути одно-, дво- і багатокомпонентними залежно від того, в якій кількості умов задачі вони представлені. Одночасно з визначенням змінних задачі встановлюються одиниці їх вимірювання. При цьому потрібно керуватися такими правилами:

- за одиницю вимірювання змінної потрібно приймати таку, що застосовується у звітності та плануванні;
- прийнята розмірність змінних не повинна передбачати додаткових розрахунків після розв’язування задачі;
- для змінних, що виражають однотипні види виробничої діяльності, розмірність повинна бути однаковою і різко не відрізнятися порядком числа.

Встановлення складу та обсягів обмежень

Після того, як види та способи виробничої діяльності позначені змінними, визначають обмеження економіко-математичної задачі. Обмеженнями називаються умови і вимоги задачі, що виражають у вигляді системи рівнянь і нерівностей можливості виробництва і баланс ресурсів. Обмеження можуть бути трьох типів: дорівнює – **(=)**; більше або дорівнює (обмеження знизу) – **(≥)**; менше або дорівнює (обмеження зверху) – **(≤)** .

За характером формулювання економічних вимог і математичним записом розрізняють ***основні**, **додаткові*** і ***допоміжні обмеження***.

Основні обмеження накладаються на всі або більшість змінних задачі. Як правило, вони виражають і основні умови задачі.

Додаткові обмеження накладаються на невеликі групи або окремі змінні.

Допоміжні обмеження використовуються, як правило, для математичного запису системи співвідношень, або для правильного формулювання економічних вимог при використанні різноманітних прийомів моделювання. Наприклад, обмеження щодо встановлення пропорційного зв'язку між окремими змінними або їх групами.

Паралельно з визначенням переліку обмежень відповідно до умов задачі встановлюють і обсяги обмежень (константи правої частини обмежень).

Обсяги обмежень – це постійні величини (константи), що виражають межі використання виробничих ресурсів або гарантований обсяг виробництва. Якщо обмеження відображають умови пропорційного зв'язку між змінними, то їх правими частинами будуть нулі.

Одиниця вимірювання правої частини обмеження ($\boldsymbol{b_i}$) визначає розмірність кожного $\boldsymbol{i}$-го обмеження. Наприклад, якщо $\boldsymbol{b}$ означає наявні в господарстві ресурси мінеральних добрив у центнерах діючої речовини, то розмірність обмеження щодо використання мінеральних добрив буде також у центнерах діючої речовини.

Розробка техніко-економічних коефіцієнтів (ТЕК)

Кількісне вираження норм витрат ресурсів або норм виходу продукції у розрахунку на одиницю виду виробничої діяльності здійснюється за допомогою ***техніко-економічних коефіцієнтів (ТЕК).***

У числовій економіко-математичній моделі техніко-економічні коефіцієнти записуються при змінних у системі обмежень.

Розрізняють ***коефіцієнти витрат*** ресурсів та ***виробництва*** продукції ***(випуску)***, ***коефіцієнти пропорційності.***

Коефіцієнти витрат (***a_{ij}***) вказують на те, яка кількість ресурсів ***i***-го виду витрачається на одиницю ***j***-го виду виробничої діяльності.

Коефіцієнти випуску (***v_{ij})*** вказують на те, яка кількість продукції ***i***-го виду вироблена в розрахунку на одиницю ***j***-го способу виробництва.

За допомогою ***коефіцієнтів пропорційності*** виражають певні співвідношення між змінними або їх групами щодо відношення один до одного або до величини обсягу обмеження.

Техніко-економічні коефіцієнти, що використовуються в економіко-математичних задачах, можуть бути ***нормативними, розрахунково-прогнозованими і фактичними***.

При розробці коефіцієнтів числової економіко-математичної моделі важливо правильно встановити їх розмірність і пов'язати її з розмірністю змінних величин і правих частин обмежень. При цьому необхідно користуватися таким ***правилом***: розмірність будь-якого коефіцієнта a_{ij}, що входить в ***i***-е обмеження, повинна відповідати розмірності, прийнятій для цього обмеження (розмірності b_i), діленій на розмірність змінної x_j. Наприклад, якщо розмірність для b_i прийнята в людино-годинах, а розмірність x_1 і x_2 відповідно, в гектарах і головах худоби, то для a_{i1} розмірністю є людино-години, віднесені на гектар, а для a_{i2} – людино-години, віднесені на голову худоби.

Формулювання (обґрунтування) критерію оптимізації та побудова цільової функції

Обґрунтування критерію оптимізації та побудова цільової функції задачі – найбільш відповідальна робота на етапі побудови числової економіко-математичної моделі. Це виражається передусім у дотриманні принципу оптимальності, тобто в досягненні заданої мети розвитку системи з найбільшою при заданих умовах ефективністю.

Виходячи з поняття оптимальності системи – найкращого її стану, що відповідає цілям функціонування в процесі розвитку, на етапі постановки економіко-математичної задачі визначається її цільова установка – мета. Остання визначає якісну сторону бажаного економічного результату. Кількісна міра цього результату характеризується ***критерієм оптимальності***. Тому поняття "критерій оптимальності" не треба ототожнювати, як це часто роблять з поняттям “цільової установки” (цілі) задачі**.**

Цільова установка – це деякий бажаний стан системи, а ***критерій оптимальності*** – показник ефективності функціонування системи з точки зору досягнення заданої мети.

В економіці найбільший інтерес представляють так звані екстремальні задачі, тобто задачі, в яких знаходять екстремум деякої величини. Якщо шукається екстремальне значення конкретного економічного показника, що кількісно виражає цільову установку задачі, то такий показник і є критерієм оптимальності. Виходячи з даного визначення, цільова установка економіко-математичної задачі повинна мати чітке кількісне визначення та відповідати математичному апарату, за допомогою якого проводяться розрахунки.

Залежно від мети задачі знаходять максимальне або мінімальне значення конкретних економічних показників.

При побудові числової економіко-математичної моделі критерій оптимальності виражають цільовою функцією (функціоналом, функцією мети) задачі, тобто аналітичною формою. При цьому коефіцієнти цільової функції c_j своєю розмірністю повинні відповідати розмірності змінних x_j.

Апробація моделі та отримання перших результатів (розв’язання задачі на ПК)

Одним із зручних способів представлення числової економіко-математичної моделі є так званий ***матричний,*** тобто запис задачі у вигляді відповідної таблиці.

Матриця – це сукупність чисел або об'єктів іншої природи, розташованих у вигляді прямокутної таблиці .

Така таблиця, що складається з m рядків і n стовпців, містить $m \times n$ клітин (позицій). При цьому кажуть, що матриця має розмір $m \times n$.

Числа або інші об'єкти, розташовані в клітинах таблиці, називають ***елементами матриці***. Положення елементів суворо фіксоване, в кожній клітині повинен розташовуватись лише один елемент і жодна клітина не повинна залишатися вільною. Елементи матриці позначають a_{ij}, де перший індекс вказує на номер рядка, а другий на номер стовпчика.

Матричний запис економіко-математичних задач, що розв’язуються ***симплексним методом***, містить:

- смислове і кодове позначення змінних та обмежень;

- власне матрицю коефіцієнтів при змінних;
- стовпчик математичних символів типів обмежень;
- стовпчик обсягів обмежень;
- рядок коефіцієнтів цільової функції (оцінки змінних).

Принципова схема матриці економіко-математичної задачі представлена в табл.2.1.1.

Таблиця 2.1.1

Принципова схема матриці економіко-математичної задачі

Змістове позначення обмежень (умови задачі)		Назви невідомих та одиниці виміру				Тип обмеження	Обсяги обмежень до відповідно умов задачі
		перша невідома	друга невідома	*j*-а невідома	остання невідома		
		x_1	x_2	$\dots x_j \dots$	x_n		
1	Назва першого обмеження та його одиниця виміру	a_{11}	a_{12}	$\dots a_{1j} \dots$	a_{1n}	≥ = ≤	b_1
2	Назва другого обмеження та його одиниця виміру	a_{21}	a_{22}	$\dots a_{2j} \dots$	a_{2n}	≥ = ≤	b_2
		…...	……	……	……		
i	Назва ***i***-го обмеження та його одиниця виміру	a_{i1}	a_{i2}	$\dots a_{ij} \dots$	a_{in}	≥ = ≤	b_i
		…..	….	……	…...		
m	Назва ***m***-го обмеження та його одиниця виміру	a_{m1}	a_{m2}	$\dots a_{mj} \dots$	a_{mn}	≥ = ≤	b_m
Z	Назва цільової функції задачі та її одиниця виміру	c_1	c_2	$\dots c_j \dots$	c_n	→	***extr***

Зауваження! В окремо взятому обмеженні допускається лише один тип обмеження із наведених.

Аналіз отриманих результатів і корегування моделі

На цьому етапі дослідження необхідно дати відповідь на питання про правильність і повноту результатів моделювання, про міру їх практичного застосування.

Передусім необхідно здійснити перевірку балансів і умов задачі. Якщо доведена коректність побудови моделі, проводять неформальний аналіз теоретичних висновків і чисельних результатів, отриманих за допомогою моделі, і зіставлення їх із наявними знаннями та фактами дійсності. Це повинно сприяти виявленню недоліків постановки економічної задачі, сконструйованої математичної моделі та використаної інформації. При виявленні недоліків здійснюється корегування в постановці задачі, формалізації умов економіко-математичної моделі або застосовуваної інформаційної бази та здійснюються нові розрахунки на комп'ютері.

Економіко-математичний аналіз оптимального плану та вибір проекту розвитку економічного процесу

Отриманий внаслідок розв'язування задачі за скорегованою моделлю результат повинен бути ретельно проаналізований методами економічного та економіко-математичного аналізу. Не зупиняючись на традиційних методах економічного аналізу, відмітимо, що невід'ємною частиною роботи щодо моделювання економічних задач є **економіко-математичний аналіз** результатів їх розв'язку.

Суть економіко-математичного аналізу полягає в перевірці обґрунтованості як сформульованої моделі, так і отриманого на її основі оптимального розв'язку.

Економіко-математичний аналіз розв'язку здійснюється у вигляді ***варіантних розрахунків*** за моделями із зіставленням різних варіантів плану та у вигляді аналізу внутрішньої структури кожного з отриманих розв'язків за допомогою ***двоїстих оцінок*** (оптимальних, об'єктивно-обумовлених оцінок) і ***коефіцієнтів заміщення*** (структурних зрушень) останньої симплексної таблиці, якщо при розв'язуванні задачі лінійного програмування застосовувався симплексний метод.

Варіантні розрахунки можуть здійснюватися при незмінній структурі самої моделі, але зі зміною числової величини конкретних її показників, або при зміні елементів моделі: критерію оптимізації, системи обмежень, способів та видів виробничої діяльності тощо.

Для прийняття вибору проекту розвитку економічного процесу або управлінського рішення на основі варіантних розрахунків необхідний подальший економічний аналіз з використанням традиційних методів.

Економіко-математичний аналіз внутрішньої структури розв’язків за допомогою ***двоїстих (подвійних) оцінок і коефіцієнтів заміщення (структурних зрушень)*** дозволяє:

- вивчити стійкість оптимального плану при зміні коефіцієнтів цільової функції, коефіцієнтів "витрати-випуск", перевірки можливості включення в план видів діяльності і технологічних способів, що не увійшли в базис;
- визначити можливі зміни оптимального плану при зміні обсягів ресурсів і складу умов-обмежень.

Такий аналіз є досить ефективним засобом оцінки оптимального плану, що дозволяє не тільки вибрати проект розвитку економічного процесу, але і передбачати можливі зміни стану системи при відповідних змінах умов її функціонування. Більш детально економіко-математичний аналіз розв’язку задачі розглянуто далі.

Розглянута послідовність етапів дослідження за допомогою методів моделювання, як і перелік робіт, що виконуються, віднесених до того чи іншого етапу, не є абсолютно строгою і незмінною. Розвиток математичного моделювання як науки, математичних методів, технічних та програмних засобів розв’язку економічних задач, досвіду та практичних навичок дослідника – все це вносить і буде вносити корективи в процес застосування економіко-математичних моделей у практичній та науковій діяльності.

2.2. ОСНОВНІ ПРИЙОМИ ЕКОНОМІКО - МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Для розробки економіко-математичних моделей та проведення з їх допомогою подальших досліджень необхідно володіти прийомами та правилами, що забезпечують формалізацію економічних процесів та явищ, тобто вміти відобразити взаємозв'язки та закономірності економічних явищ у математичній формі.

Для задач, що розв'язуються методами лінійного програмування, організаційні, економічні, технологічні та інші умови записуються у математичній формі у вигляді лінійних співвідношень типу $(\leq), (\geq), (=)$.

У зв’язку з великою кількістю і розмаїтістю задач, що розв'язуються методами оптимізації, важко уявити всю сукупність прийомів та правил, що забезпечують формалізацію економічних процесів і явищ. Тому у практиці економіко-математичного моделювання всю сукупність засобів математичної формалізації зводять до основних прийомів, при застосуванні яких повинні забезпечуватися певні вимоги.

Розглянемо зміст та можливості застосування основних прийомів математичної формалізації економічних умов у різних модифікаціях.

Математичний запис умов з незмінюваними параметрами

Умови, в яких техніко-економічні коефіцієнти змінних величин постійні, а обсяги обмежень строго задані, найчастіше застосовуються під час моделювання економічних процесів та явищ. Їх математична формалізація не складна і в загальному вигляді може бути подана так:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned}
$$

де $\boldsymbol{i}$ – індекс видів ресурсів чи обсягів виробництва ($i = 1, 2, \ldots, m$);

$\boldsymbol{j}$ – індекс видів діяльності ($j = 1, 2, \ldots, n$);

x_j – величина j-ї змінної;

a_{ij} – витрати ресурсів (вихід продукції) i-го виду на одиницю j-го виду діяльності (змінної);

b_i – обсяг i-го обмеження (виду ресурсу чи обсягу виробництва).

Математичний запис умов зі змінними обсягами обмежень

У практиці моделювання часто зустрічається таке формулювання техніко-економічних умов, що потребує зміни обсягів обмежень ***(коефіцієнтів*** b_i ***)*** при незмінних значеннях коефіцієнтів змінних величин. Це стосується тих випадків, коли відоме мінімальне та максимальне значення обсягу обмеження b_i або ж відомі частково межі зміни обсягу обмеження і його величина має бути знайдена в процесі розв’язку задачі. Застосовують два різновиди математичної формалізації таких умов.

Перший прийом полягає у записі умови за допомогою двох типів лінійних співвідношень $(\le)$ і $(\ge)$. Цей прийом дозволяє змінити запис обмеження у встановлених межах зміни обсягу обмежень

$$\alpha_i \le a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + a_{in}x_n \le \beta_i$$

такими співвідношеннями:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \ge \alpha_i \ ,$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \le \beta_i \ .$$

За допомогою цього прийому забезпечується зміна величини b_i у межах $\alpha_i \le b_i \le \beta_i$, де α_i – нижня допустима межа зміни величини b_i, β_i – верхня припустима межа.

У практиці постановки задач не завжди можна визначити розміри α_i та β_i Це стосується випадків, при яких значення нижніх та верхніх меж b_i залежать від інших умов, що передбачені в економіко-математичній моделі. Їх роль та вплив на стан системи до розв'язку задачі невідома, а отже, невідомо, як може змінюватися величина b_i.

Тому, щоб підпорядкувати зміну b_i впливу інших умов функціонування системи застосовують ***другий прийом*** моделювання обмежень зі змінюваними обсягами, що полягає у введенні допоміжної змінної, яка виражає величину зміни параметра b_i. Її значення визначається в процесі розв'язку задачі. При такому підході умова в загальному вигляді формулюється так:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix} \quad b_i + \bar{x}_{n+1} ,$$

де $\bar{x}_{n+1}$ – допоміжна змінна.

Прийом допоміжної змінної з відображеною величиною

При моделюванні економічних процесів можливі випадки, в яких обсяг i-го виду ресурсів, або обсяг виробництва продукту необхідно одержати як розрахункову величину, тобто величину, що визначається у процесі розв'язку задачі. У таких випадках використовують прийом введення допоміжної змінної з відображеною величиною, яку іноді називають **"відображеною"** змінною. Прийом базується на лінійному співвідношенні вигляду:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = \overline{x}_k ,$$

або

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n - \overline{x}_k = 0,$$

де $\overline{x}_k$ – допоміжна змінна з відображеною величиною $(k \in K)$.

Математична формалізація умов пропорційного зв'язку

Оптимальне функціонування систем, як правило, припускає певне пропорційне співвідношення їх окремих елементів. Якщо елементами системи є види виробничої діяльності, розмір яких визначається в процесі розв'язку економіко-математичної задачі, то і в моделі необхідно передбачити ці пропорції, тобто формалізувати вимоги співвідношення між значеннями двох або декількох змінних. У цих випадках для запису умов задачі використовують обмеження пропорційного зв'язку.

Коефіцієнти пропорційності в записі умови пропорційного зв'язку знаходяться лише біля тих змінних, які позначають обмежувані види діяльності. Для того, щоб уникнути трудомістких процесів перетворення співвідношень пропорційного зв'язку, коефіцієнти пропорційності можна визначати за формулою:

$$K = \frac{100 - d}{d},$$

де K – коефіцієнт пропорційності,
d – обмеження виду діяльності у відсотках.

Для розглянутого випадку визначимо коефіцієнти пропорційності за наведеною формулою:

$$K_{(1)} = \frac{100 - 35}{35} = 1{,}85,$$

$$K_{(2)} = \frac{100 - 60}{60} = 0{,}67.$$

Математична формалізація умов із техніко - економічними коефіцієнтами (ТЕК), що змінюються

Методи лінійного програмування передбачають, що коефіцієнти типу «витрати-випуск» біля змінних є величинами постійними. Проте, цінність розв'язку ряду задач полягає у визначенні показників у процесі розв'язку, під впливом усіх, або принаймні частини умов економіко-математичної моделі. У цьому випадку використовують спеціально розроблені прийоми моделювання, що дозволяють враховувати зміну коефіцієнтів біля невідомих і знаходити їх фактичне значення за допомогою відповідних розрахунків після розв'язку задачі.

Найбільш широко використовується ***метод сумування коефіцієнтів***. У загальному випадку його суть полягає у використанні прийому введення допоміжних змінних і допоміжних обмежень.

Метод введення допоміжних змінних та обмежень передбачає визначення фактичних значень шуканих показників за допомогою додаткових розрахунків за методом сумування.

Цей прийом моделювання, незважаючи на його певну складність та незручність у користуванні, дозволяє виразити умови економіко-математичної задачі в такому вигляді, щоб фактичні значення окремих показників можна було розрахувати за результатами розв'язку, а самі умови можуть передбачати можливість зміни коефіцієнтів при змінних величинах.

Крім того, для формалізації умов із змінюваними техніко-економічними коефіцієнтами можуть застосовуватися також інші прийоми моделювання, такі як ***метод віднімання коефіцієнтів, метод середнього зваженого***.

Метод віднімання коефіцієнтів ґрунтується на тих же положеннях, що і ***метод сумування коефіцієнтів***. По суті – це обернений йому метод, що використовується для запису умов таких задач, у яких необхідно передбачити зниження норм витрат ресурсів на одиницю виду виробничої діяльності, наприклад, у результаті впровадження комплексу машин та механізмів. При цьому випуск продукції може також збільшуватися, або залишатися незмінним.

Застосування методу ***віднімання коефіцієнтів*** для формалізації таких умов не викликає труднощів, проте в практичних розрахунках, внаслідок того, що важко знайти інформацію про підвищення продуктивності праці від додаткових капітальних вкладень, він майже не застосовується.

Метод середнього зваженого не викликає труднощів для визначення фактичного значення показника після розв'язку задачі. Проте при його застосуванні використовують певну методичну особливість, встановлюючи ***перелік невідомих,*** суть якої полягає в тому, що вид діяльності, який допускає зміну коефіцієнта витрат або випуску, вводиться в задачу двома змінними (x'_j та x''_j). Відповідно, коефіцієнти біля цих змінних виражають нижній та верхній рівні витрат або випуску.

Моделювання цільової функції

Оптимальний стан функціонування системи означає найкращий її стан, що відповідає цілям її функціонування в процесі розвитку. Проте оптимуму взагалі, без зв'язку з конкретним показником ефективності, не існує. Тому, у процесі розв'язання задачі визначається екстремальне значення конкретного економічного показника, що і є показником критерію оптимізації. Тобто, якщо задана деяка система лінійних співвідношень, що складається з ***m*** обмежень і ***n*** змінних величин, то цільова функція цієї системи запишеться:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n \to \max(\min),$$

де c_j – коефіцієнти цільової функції при невідомих величинах системи.

При постановці практичних задач показником критерію оптимізації, крім прямих величин, можуть бути і розрахункові. Можуть бути задачі, в яких цільова функція має дробово-лінійний вигляд.

Іноді виникає необхідність оптимізувати задачу при максимізації одних та мінімізації інших величин. У кожному з цих випадків використовують відповідні прийоми моделювання або алгоритми розв'язання задач.

2.3. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Моделювання, як загальнонауковий метод дослідження, поєднує процес створення моделей і проведення з їх допомогою відповідних розрахунків. В економічних задачах по сільському господарству результатом таких розрахунків є визначення видів виробничої діяльності та їх розмірів, що найбільше відповідають меті функціонування системи. Однак для прийняття рішення з планування або управління часто недостатньо мати одержаний у результаті розв'язку модельний варіант. На практиці для цього необхідно досліджувати систему всебічно, у взаємозв'язку з навколишнім середовищем і у множині залежностей між її складовими елементами. Цьому сприяє економіко-математичний аналіз оптимальних рішень.

Суть економіко-математичного аналізу

Економіко-математичне моделювання передбачає розробку математичних моделей, що адекватно описують ті чи інші виробничі процеси. Найчастіше лінійно-оптимізаційні моделі будуються як задачі математичного, зокрема лінійного програмування:

Дослідження за допомогою методів моделювання є доволі складним процесом, який передбачає виконання ряду взаємопов'язаних робіт, що об'єднуються в такі етапи:

- вивчення економічного процесу або об'єкта моделювання;
- постановка економіко-математичної задачі;
- вибір базової моделі або формалізація умов і цілей задачі та побудова її економіко-математичної моделі;
- вибір математичного методу розв'язку задачі;
- побудова числової економіко-математичної моделі;
- апробація моделі та одержання перших результатів;
- аналіз попередніх результатів і корегування моделі;
- розв'язок за відкоригованою моделлю;
- економіко-математичний аналіз і вибір проекту розвитку економічного процесу.

Вибору проекту розвитку системи і прийняттю управлінського рішення передує економіко-математичний аналіз результату, одержаного за розв'язком задачі по уточненій моделі.

Суть економіко-математичного аналізу полягає у перевірці обумовленості як сформованої моделі, так і отриманого на її основі оптимального рішення, виходячи з кількісних властивостей цієї моделі і математичних характеристик результату розрахунків.

Економіко-математичний аналіз здійснюється, по-перше, у вигляді **варіантних розрахунків** по моделях із зіставленням різних варіантів плану, по-друге, у вигляді **аналізу внутрішньої структури** кожного із отриманих розв'язків за допомогою подвійних оцінок, які ще називають оптимальними чи об'єктивно-обумовленими оцінками або розв'язуючими множниками і коефіцієнтів заміщення (структурних зрушень).

Економіко-математичний аналіз на основі варіантних розрахунків

Варіантні розрахунки можуть здійснюватися при незмінній структурі самої моделі, але зі зміною чисельної величини конкретних її показників (коефіцієнтів затрат-випуску – $\boldsymbol{a_{ij}}$, оцінок видів виробничої діяльності в цільовій функції – $\boldsymbol{c_j}$, обсягів обмежень ресурсів або обсягів виробництва продукції – $\boldsymbol{b_i}$), а також при зміні (варіації) елементів самої моделі (показника критерію оптимізації, системи обмежень, способів і видів виробничої діяльності).

Для вибору проекту розвитку економічного процесу (системи) або прийняття управлінського рішення на основі варіантних розрахунків необхідний подальший економічний аналіз з використанням традиційних методів.

Аналіз оптимальних рішень з використанням двоїстих оцінок

Крім варіантних розрахунків, економіко-математичний аналіз оптимального плану передбачає й аналіз внутрішньої структури одержаного розв'язку за допомогою **двоїстих оцінок** (оптимальних, об'єктивно-обумовлених оцінок) і **коефіцієнтів заміщення** (структурних зрушень).

Розглянемо суть такого аналізу в кількох аспектах, що полегшить розуміння його застосування. Перш за все розглянемо аналіз результатів розв'язку задачі з використанням оцінок оптимального плану.

Двоїсті оцінки витікають з постановки та розв'язання двоїстих задач лінійного програмування. Для кожної задачі лінійного програмування існує спряжена з нею задача. Перша є прямою, а друга по відношенню до неї буде двоїстою. Кожна з пари двоїстих задач є самостійною задачею лінійного програмування і може розв'язуватися незалежно від іншої.

Згідно правилам побудови двоїстої задачі лінійного програмування (див. пункт 1.3) її змінні величини $\boldsymbol{y_i}$ можуть бути як додатними, так і від'ємними, що має важливий економічний зміст.

Від'ємне значення змінної y_i є наслідком того, що часто в конкретних задачах обмеження задаються у вигляді змішаної системи, що містить, як нерівності, так і рівняння. У такому випадку **пряма задача** формулюється так: визначити n-вимірний вектор

$$\overline{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

при якому досягається максимум цільової функції:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

з урахуванням обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = k+1, k+2, \ldots, s);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad (i = s+1, s+2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0, \ (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Двоїста їй **задача** формулюється так.

Визначити m-вимірний вектор $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, за якого досягається мінімум цільової функції:

$$W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

з урахуванням обмежень

$$y_i \ge 0, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, k),$$

$$y_i \ge\le 0, \quad (i = k+1, k+2, k+3, \ldots, s),$$

$$y_i \le 0, \quad (s = i+1, s+2, s+3, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Для кращого розуміння економічної інтерпретації значень двоїстих оцінок згадаємо деякі **теореми двоїстості.**

З **основної теореми двоїстості** відомо, що якщо одна з пари двоїстих задач має хоча б один оптимальний план, то і друга задача також має, хоч один оптимальний план, причому цільові функції вихідної і двоїстої задач чисельно рівні. Практичне значення цього положення полягає в тому, що іноді порівняно легко можна отримати оптимальний план двоїстої задачі і деякий допустимий план прямої.

За абсолютною величиною різниці цільових функцій для цих планів можна судити про ступінь наближення до оптимального розв'язку прямої задачі.

Оптимальні плани двох задач пов'язані не лише рівністю значень цільових функцій, у них дотримуються й інші важливі співвідношення, що витікають з теореми рівноваги. А саме: для того, щоб два допустимих плани пари двоїстих задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли **умови доповнюючої нежорсткості – (**(1.3.3) – (1.3.4).

Двоїсті оцінки – це не фактична ціна ресурсу, а відносна оцінка ресурсів в умовах функціонування системи, що мають одиниці виміру цільової функції. Двоїсті оцінки не можуть бути і не є підставою для визначення вартості ресурсу, це – інструмент порівняння та економічного аналізу функціонування системи.

Потрібно також мати на увазі, що оцінки дозволяють судити про ефект лише порівняно невеликих змін обсягу ресурсів. При значних змінах самі оцінки стають іншими. Таким чином, двоїсті оцінки вимірюють ефективність приросту обсягів ресурсу в конкретних умовах даної задачі, тобто в межах стійкості оптимального плану.

Аналіз оптимальних рішень за допомогою коефіцієнтів заміщення

Розуміння стійкості оптимального плану пов'язане з ознайомленням з **коефіцієнтами заміщення** або, як їх ще називають, **коефіцієнтами структурних зрушень**.

За допомогою коефіцієнтів заміщення проводять аналіз за такими напрямами:

- з метою вивчення стійкості оптимального плану до зміни первинних обсягів виробничих ресурсів і оцінки цільової функції, тобто, в яких межах їх зміни в базисі залишаються ті ж змінні задачі;
- з метою розрахунку нової структури плану при зміні обсягів ресурсів або обсягів гарантованого виробництва, чи при включенні в розрахований план видів виробничої діяльності, які раніше не входили до нього;
- з метою виявлення умов, за яких можливі включення в розрахований план видів виробничої діяльності, які раніше не входили до нього.

Вплив, який спричиняють коефіцієнти заміщення на базисний розв'язок, визначається економічним змістом небазисних змінних.

Розглянемо основні змінні задачі. Якщо припустити, що основна змінна не ввійшла в число базисних, то при заданих умовах включення її до плану неефективне на величину об'єктивно-обумовленої (двоїстої) оцінки, а коефіцієнти заміщення вказують на зміни в структурі плану. Причому позитивні коефіцієнти заміщення показують, на скільки зменшуються, а від'ємні – на скільки збільшуються відповідні значення базисних змінних з введенням в нього основної небазисної змінної з одиничною інтенсивністю.

При здійсненні економіко-математичного аналізу є цікавим вивчення оптимального плану з точки зору його стійкості на зміни оцінок цільової функції.

Зміни оцінок базисних змінних призводять до зміни двоїстих оцінок. Причому із збільшенням оцінок цільової функції двоїсті оцінки збільшуються по тих змінних, що мають у відповідному рядку позитивний коефіцієнт заміщення, і зменшуються по змінних з від'ємним коефіцієнтом заміщення. При зменшенні оцінки базисних змінних дія відповідних коефіцієнтів протилежна. Звідси, максимальна величина збільшення оцінки базисної змінної в цільовій функції дорівнює найменшій частці від ділення об'єктивно-обумовлених оцінок на від'ємні коефіцієнти заміщення по відповідному рядку.

Таким чином, економіко-математичний аналіз оптимального плану передбачає варіантні розрахунки, а також використання двоїстих оцінок як інструмента вимірювання ефективності приросту обсягів ресурсів у межах стійкості плану, тобто в конкретних умовах даної задачі. З їх допомогою виявляють "вузькі місця", вони вказують міру дефіцитності або ж надмірності ресурсів по відношенню до прийнятого в задачі показника критерію оптимізації. Крім того, за допомогою коефіцієнтів заміщення визначаються як межі стійкості плану, так і його нова структура при зміні основних умов функціонування системи.

РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

3.1.ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Загальна характеристика задачі масового обслуговування

У повсякденному житті і у виробничій діяльності широко розповсюджені системи, призначені для багаторазового розв'язання однотипних задач. Процеси, які при цьому виникають, отримали назву *процесів обслуговування*, а системи – ***систем масового обслуговування*** (СМО). Основи теорії систем масового обслуговування було закладено у працях датського математика А.К. Ерланга і отримали подальший розвиток у працях багатьох вітчизняних та іноземних вчених.

Системи масового обслуговування – це такі системи, до яких у випадкові моменти часу поступають замовлення на обслуговування, при цьому замовлення, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування.

Приклади систем масового обслуговування:

- пости технічного обслуговування автомобілів;
- пости ремонту автомобілів;
- персональні комп'ютери, що обслуговують замовлення, що надходять, або вимоги на розв'язання тих або інших задач;
- станції технічного обслуговування автомобілів;
- аудиторські фірми;
- відділи податкових інспекцій, що займаються прийманням і перевіркою поточної звітності підприємств;
- перукарні;
- світлофори;
- підприємства харчування;
- телефонні станції тощо.

Система масового обслуговування являє собою предмет наукового дослідження теорії ймовірностей. В рамках цієї великої області наукового знання, виділяється кілька концепцій, кожна з яких, це досить автономна теорія масового обслуговування. У цих теоріях, як правило, використовується методологія математичної статистики.

Основоположником однієї з найперших сучасних СМО є А. Я. Хинчин, який обґрунтував концепцію потоку однорідних подій. Потім датський телеграфіст, а згодом – вчений Агнер Ерланген, розробив свою концепцію (на прикладі роботи телефоністів, які очікують запиту на задоволення з'єднання), в якій вже виділив СМО з очікуванням і без очікування.

Кожна така система масового обслуговування апріорі припускає, що є деякі стандартні шляхи, по яких проходять заявки суб'єктів на задоволення. Ці заявки проходять через так звані канали обслуговування, які різноманітні за своїм призначенням та характеристиками. Заявки приходять переважно хаотично за часом, їх багато, тому встановлювати логічні і причинні зв'язки між ними надзвичайно складно. Науковий висновок, на цій підставі, полягає в тому, що СМО, у своїй переважній більшості, функціонують на принципах випадковості.

Іноді системи обслуговування мають обмежені можливості щодо задоволення попиту і це призводить до утворення черг. Задачі масового обслуговування розглядають питання утворення та функціонування черг, які виникають в повсякденному житті. Наприклад, черги літаків, що йдуть на посадку, клієнти в ательє побутового обслуговування тощо. Черги виникають внаслідок того, що потік вимог (клієнтів) на обслуговування є випадковим і ним не можна управляти.

Якщо кількість каналів обслуговування досить велика, то черги виникають рідко, однак при цьому неминучі довготривалі простої обладнання. З іншого боку, якщо недостатня кількість каналів обслуговування, створюються черги і можливі великі втрати внаслідок очікування. В задачах масового обслуговування часто необхідно визначити, яка кількість каналів масового обслуговування необхідна, щоб мінімізувати сумарні втрати, що очікуються від несвоєчасного обслуговування та простою обладнання.

Побудова сучасних технологій масового обслуговування здійснюється переважно методами моделювання. Є також системи, дослідження яких ведеться аналітичними методами, але такий підхід досить складний. До СМО належать і ті системи, які можна досліджувати за допомогою методів статистики – статистичного моделювання та статистичного аналізу

Основні елементи математичної моделі систем масового обслуговування

Математична модель системи масового обслуговування включає такі елементи:

- вхідній потік вимог, що надходять на обслуговування;
- черга, яка складається з вимог, що очікують на обслуговування;

- система обслуговування;
- вихідні потоки обслужених, втрачених вимог та вимог, що надходять на повторне обслуговування;
- характеристики якості системи;
- механізм (дисципліна) обслуговування.

Характеристики основних елементів моделі системи масового обслуговування

До основних елементів моделі масового обслуговування відносять, в першу чергу**,** ***клієнта*** (замовлення на обслуговування) і ***сервіс*** (обслуговуючий пристрій, прилад, засіб обслуговування тощо). Клієнти надходять до системи обслуговування з ***джерела клієнтів*** (джерела вимог). Іншими словами, ***джерело вимог*** – це генератор клієнтів.

Основною характеристикою джерела вимог є його ***потужність*****,** яка може бути ***скінчена*** і ***нескінчена***. Джерело скінченої потужності обмежує кількість клієнтів, що надходять на обслуговування (наприклад, у комп'ютерному класі, що має $\boldsymbol{N}$ комп'ютерів, сумарна кількість потенційних замовлень на їх ремонт не перевищує $\boldsymbol{N}$). Джерело нескінченої потужності завжди має клієнтів вдосталь (наприклад, дзвінки, що надходять до телефонної мережі).

Вхідній потік вимог визначає послідовність моментів надходження вимог на обслуговування і зазначає кількість таких вимог у кожному черговому надходженні. Для описання вхідного потоку потрібно задати закон розподілу ймовірностей, що управляє послідовністю моментів надходження вимог на обслуговування і зазначити кількість таких вимог у кожному черговому надходженні. Так, наприклад, вимоги у бібліотеці чи у службі таксі можуть надходити в середньому кожні 4 хвилини. При цьому в умовах бібліотеки щоразу надходить одинична вимога (клієнти приходять у бібліотеку по одному), а в умовах служби таксі можуть надходити як одиничні, так і групові вимоги (пасажири можуть їздити по одному або з компанією).

Характеристикою потоку вимог є деякий параметр $\boldsymbol{\lambda}$, який характеризує ***інтенсивність надходження замовлень в систему***, тобто це середня кількість замовлень, що надходять в систему за одиницю часу.

Потік вимог є ***регулярним***, якщо замовлення надходять до системи одне за одним через рівні проміжки часу. Наприклад, потік вимог на конвеєр при розливі молока (з постійною швидкістю руху) є регулярним. Потік вимог називається ***стаціонарним***, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від часу. Зокрема, інтенсивність стаціонарного потоку є величина постійна.

Наприклад, потік автомашин на світлофорі не є стаціонарним протягом доби, однак його можна вважати стаціонарним у години пік. Потік вимог називається ***потоком без наслідків***, якщо для будь-яких двох інтервалів часу, які не перетинаються, кількість замовлень, що надходять до системи в ці інтервали, не залежить від кількості замовлень, що надійшли в інші проміжки часу.

Наприклад, потік пасажирів метро практично не має наслідків. Потік замовлень називається ***ординарним***, якщо події надходять по одному, а не групами. Наприклад, потік поїздів у метро є ординарним, а потік вагонів - не ординарним. Потік замовлень називається ***найпростішим*** (або ***стаціонарним пуасонівським***), якщо він одночасно стаціонарний, ординарний і не має наслідків.

Черга – ряд замовлень, що очікують на обслуговування. Розрізняють дві її характеристики – довжину (місткість) і дисципліну черги. ***Довжина черги*** може бути скінчена і нескінчена. Так, наприклад, у комп'ютерному класі, що має ***N*** комп'ютерів, сумарна кількість потенційних замовлень на їх ремонт не перевищує ***N***, отже, черга не може бути більша за ***N-1***.

Дисципліна черги визначає принцип, відповідно до якого обслуговуються замовлення в системі.

Частіше усього використовуються дисципліни черги, обумовлені наступними правилами:

- першим прийшов – перший обслуговуєшся;
- прийшов останнім – обслуговуєшся першим;
- випадковий добір замовлень;
- добір замовлень за критерієм пріоритетності;
- обмеження часу очікування моменту настання обслуговування (має місце черга з обмеженим часом очікування обслуговування, що асоціюється з поняттям «припустима довжина черги»).

Механізм обслуговування визначається тривалістю процедур обслуговування (t) і кількістю вимог (μ), що обслужені за одиницю часу. Механізм обслуговування може складатися з декількох пристроїв (каналів обслуговування). При цьому ці пристрої можуть бути розташовані *паралельно* (наприклад працює декілька кас у супермаркеті), або *послідовно* (наприклад, послідовна обробка деталей у цеху на токарному та фрезерному станках).

Тип часу обслуговування може бути як ***детермінованим***, так і ***випадковим***. Так, наприклад, обслуговування клієнтів на підприємстві харчування вважається завершеним, коли клієнт (або група клієнтів) залишають відповідний заклад. Тривалість часу обслуговування (t) залежить від запитів клієнта (або групи клієнтів) і є випадковою величиною. Обробка однотипних деталей, наприклад, на токарному станку деякого цеху, характеризується детермінованим часом обслуговування.

Вихідний потік вимог характеризується інтенсивністю.

μ-інтенсивність обслуговування, тобто число вимог, обслужених за одиницю часу, протягом якого прилад зайнятий обслуговуванням. Існує залежність між часом обслуговування та інтенсивністю обслуговування, яка виражається формулою:

$$t = \frac{1}{\mu} .$$

Класифікація систем масового обслуговування

При дослідженні СМО можуть розв'язуватися:

1) ***задачі аналізу СМО*** – визначення характеристик якості обслуговування залежно від параметрів і властивостей вхідного потоку вимог, параметрів і структури системи обслуговування і дисципліни обслуговування;

2) ***задачі параметричного синтезу*** – визначення параметрів системи обслуговування при заданій структурі залежно від параметрів і властивостей потоку вимог, дисципліни і якостей обслуговування;

3) ***задачі синтезу структури системи з оптимізацією її параметрів*** таким чином, щоб при заданих потоках, дисципліні і якості обслуговування вартість СМО була мінімальною або були мінімальними втрати замовлень при заданих потоках, дисципліні і вартості системи.

Системи масового обслуговування класифікуються за різноманітними ознаками.

Класифікація СМО за кількістю обслуговуючих пристроїв:

- одноканальні (з одним обслуговуючим пристроєм);
- багатоканальні (з декількома паралельними обслуговуючими пристроями).

За складом обслуговуючих пристроїв багатоканальні **СМО** поділяють на:

- ***однофазні*** (якщо після проходження одного обслуговуючого пристрою замовлення вважається обслуженим);

- *багатофазні* (замовлення повинно послідовно пройти через декілька обслуговуючих пристроїв).

Класифікація за часом перебування вимоги в системі до початку обслуговування:

- ***з відмовами*** (якщо замовлення, що надійшло до системи, не може бути обслужене, воно покидає систему. Наприклад, телефонуючи до приятеля, Ви почули, що його номер зайнятий, Вам відмовлено в обслуговуванні – Ви чуєте короткі гудки – і для подальшої розмови Вам необхідно ще раз набрати номер, тобто ще раз подати замовлення на обслуговування);
- ***з очікуванням*** (замовлення, що надійшло до системи у момент, коли всі канали зайняті, становиться в чергу і очікує на обслуговування).

Очікування може бути ***обмеженим*** і ***необмеженим***. Обмежуватись очікування може часом очікування або довжиною черги.

Для аналізу випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою, так званим ***графом станів***.

Для подальшого розрахунку характеристик ефективності роботи систем масового обслуговування необхідно визначити, окрім можливих станів системи, також ймовірності настання цих станів (P_i), які називають ***граничними ймовірностями системи***.

Характеристика систем масового обслуговування по видах:

- одноканальні СМО з відмовами;
- одноканальні СМО з очікуванням з обмеженням на довжину черги;
- одноканальні СМО з необмеженим очікуванням;
- багатоканальні СМО з відмовами;
- багатоканальні СМО з очікуванням з обмеженням на довжину черги;
- багатоканальна СМО з необмеженим очікуванням.

Багатоканальна модель масового обслуговування з відмовами

Принцип роботи системи. Припустимо, що всі потоки є найпростіші. Тоді переходи СМО з одного стану до іншого можливі тільки до сусідніх станів, тобто якщо СМО в будь-який час перебуває у стані S_k, то наступний її стан може бути S_{k+1} або S_{k-1}. Далі розглянемо так звану класичну систему з відмовами. Параметри цієї системи ***(n, λ, μ)***.

Її робота регулюється за такими принципами:

- якщо заявка надходить до системи в момент часу, коли хоча б один канал вільний, вона приймається до обслуговування;
- якщо заявка надходить до системи, коли всі канали зайняті, вона отримає відмову.

Прийняті до обслуговування заявки мають обслуговування до кінця.

Граф станів такої системи має вигляд (Рис.3.1.1.):

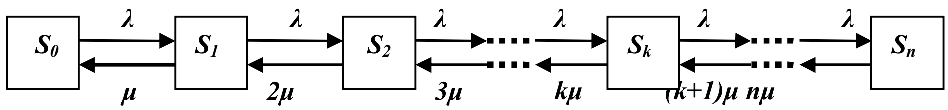


Рис. 3.1.1. Багатоканальна модель СМО з відмовами

Позначення

СМО – система масового обслуговування;

n – кількість каналів обслуговування;

λ – потужність вхідного потоку заявок до СМО;

μ – потужність потоку обслуговуваних заявок одним каналом;

S_o – стан системи, коли всі канали вільні;

S_1 – стан системи, коли 1 канал зайнятий;

..

S_k – стан системи, коли k каналів зайняті;

..

S_n – стан системи, коли всі канали зайняті.

Граф станів системи є малюнок, де вказано: всі можливі стани системи, можливі переходи системи із одного стану до інших та потужності потоків, які здійснюють ці переходи.

Основні характеристики роботи системи

$\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – середня кількість заявок, які йдуть до системи протягом середнього часу обслуговування однієї заявки в одному каналі;

$\boldsymbol{P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^K}{k!}}}$ – ймовірність того, що система у будь-який момент часу знаходиться в стані $\boldsymbol{S_0}$, тобто вона вільна, це є ймовірність простої системи;

$\boldsymbol{P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0}$ – ймовірність того, що система, у будь-який момент знаходиться у стані $\boldsymbol{S_k}$, тобто k каналів зайнято;

$\boldsymbol{P_n = \dfrac{\alpha^n}{n!} P_0}$ – ймовірність того, що система знаходиться у стані S_n, тобто це є ймовірність, що заявка отримуватиме відмови $P_{відм.} = P_n$;

$P_{обсл.} = 1 - P_n$ – ймовірність того, що заявка буде прийнята до обслуговування, тобто хоча б один канал вільний;

$\boldsymbol{\bar{k} = \alpha P_{обсл}}$ – середня кількість зайнятих каналів, тобто середня кількість заявок, які мають обслуговування;

$\boldsymbol{\lambda_{обсл.} = \bar{k}\mu = \lambda P_{обсл.}}$ – абсолютна пропускна здатність СМО, тобто середня кількість заявок, які є обслуговані системою за одиницю часу, це є потужність вихідного потоку обслугованих системою заявок;

$\boldsymbol{\bar{t}_{простою} = \dfrac{1}{\lambda}}$ – середній час простою системи;

$\boldsymbol{\bar{t}_{сист.} = \dfrac{\bar{k}}{\lambda}}$ – середній час перебування заявки у системі;

$\boldsymbol{\bar{t}_{зай.кан.} = \dfrac{1}{\mu}}$ – середній час зайнятості одного каналу;

$\boldsymbol{\bar{t}_{пов.сист.} = \dfrac{1}{n\mu}}$ – середній час повного навантаження системи (всі канали працюють).

Багатоканальна модель масового обслуговування з очікуванням (з чергою)

Принцип роботи системи. Припустимо, що всі потоки є найпростіші. Тоді переходи СМО з одного стану до іншого можливі тільки до сусідніх станів, тобто якщо СМО в будь-який час перебуває у стані $\boldsymbol{S_v}$, то наступний її стан може бути $\boldsymbol{S_{v+1}}$ або $\boldsymbol{S_{v-1}}$. Далі розглянемо модель СМО з очікуванням, яка має такі особливості.

Кількість місць у черзі необмежена. Обслуговування заявок у черзі не має пріоритетів (пільг). Черга є загальна до всіх каналів. Якщо заявка надходить до системи, коли хоча б один канал вільний, вона приймається до обслуговування в будь-який вільний канал і обслуговується там до кінця. Якщо заявка надходить до системи, коли всі канали зайняті, вона чекає на обслуговування у черзі, причому заявка, яка опинилася у черзі, чекає там до часу, поки вона не попадає на обслуговування у будь-який канал (терпляча поведінка заявки у черзі).

Граф станів такої системи має вигляд (Рис.3.1.2):

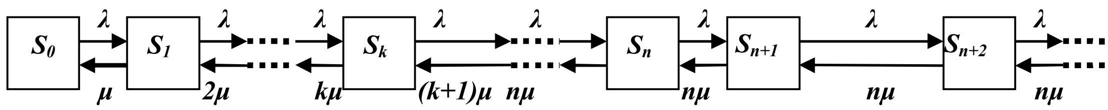


Рис. 3.1.2. Багатоканаьна модель СМО з очікуванням

Позначення

СМО – система масового обслуговування;

$\boldsymbol{n}$ – кількість каналів обслуговування;

$\boldsymbol{\lambda}$ – потужність вхідного потоку заявок до СМО;

$\boldsymbol{\mu}$ **–** потужність потоку обслуговуваних заявок одним каналом;

r – кількість заявок у черзі;

S_o – стан системи, коли всі канали вільні, черги немає;

S_1 – стан системи, коли 1 канал зайнятий, черги немає;

..

S_k – стан системи, коли k каналів зайняті, черги немає;

..

S_n – стан системи, коли всі канали зайняті, черги немає;

S_{n+1} – стан системи, коли всі канали зайняті та 1 заявка чекає на обслуговування у черзі;

..

$\boldsymbol{S_{n+r}}$ – стан системи, коли всі канали зайняті та r заявок чекають на обслуговування у черзі, ($\boldsymbol{v = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, n+2,\ldots}$).

Основні характеристики роботи СМО

Умова стаціонарного режиму роботи СМО: черга не повинна зростати нескінченно, тобто $\boldsymbol{\lambda < n\mu}$ (потужність праці всіх каналів повинна бути більша за густину вхідного потоку).

$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ – середня кількість заявок (вимог), які йдуть до СМО протягом середнього часу обслуговування однієї заявки;

$P_o = \frac{1}{1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}+\frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}$ – ймовірність того, що СМО у будь-який час знаходиться у стані S_o, тобто вона вільна;

$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_o$ – ймовірність того, що СМО у будь-який час знаходиться у стані S_k, $(0 \le k \le n)$;

$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot p_o$ – ймовірність того, що всі канали навантажені;

$P_{чер} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \cdot p_o$ – ймовірність того, що заявка опинилася в черзі;

$P_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!\,n} \cdot p_o$ – ймовірність того, що у будь-який час всі канали навантажені та одна заявка чекатиме у черзі;

$P_{n+r} = \frac{\alpha^{n+r}}{n!\,n^r} \cdot p_o$ – ймовірність того, що у будь-який час всі канали навантажені та r заявок у черзі (r =1,2,3….);

$\bar{k} = \alpha$ – середня кількість зайнятих каналів;

$\bar{r} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!\,n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^2} \cdot p_o$ – середня кількість заявок у черзі;

$(\bar{k}+\bar{r})$ – середня кількість заявок у системі (у каналах та в черзі);

$\bar{t}_{чер} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$ – середній час перебування заявки у черзі;

$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{k}+\bar{r}}{\lambda}$ – середній час перебування заявки у системі (в черзі та на обслуговуванні);

$P_{відм} = 0$ – ймовірність відмови;

$P_{обсл} = 1$ – ймовірність обслуговування, бо якщо заявка надходить до системи, то згідно з принципом роботи СМО, яку ми розглядаємо, вона обов’язково буде обслужена (дочекається своєї черги на обслуговування).

Одноканальна СМО (n=1)

Система одно канальна, тоді умова стаціонарного режиму робо-
ти

$$\frac{\lambda}{\mu} = \alpha < 1.$$

Основні характеристики роботи такої СМО:

$p_o=1-\alpha$; $p_1=\alpha \cdot p_o$; $p_{1+1}=\alpha^{1+1}\cdot p_o$; … $p_{1+r}=\alpha^{1+r}\cdot p_o$; … ми маємо геометричну прогресію з $\alpha < 1$, ймовірності зменшуються, тобто для такої системи найбільш ймовірний стан є такий, коли вона вільна (черги немає). Це зрозуміло, тому що єдиний канал, який є, працює потужніше за густину вхідного потоку ($\mu > \lambda$);

$p_{зайн}=1-p_o=\alpha$ (ймовірність того, що буде черга);

$$\bar{k} = \alpha;$$

$$\bar{r} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha};$$

$$\bar{k} + \bar{r} = \frac{\alpha}{1-\alpha};$$

$$\bar{t}_{сист} = \frac{\bar{k}+\bar{r}}{\lambda}; \quad \bar{t}_{чер} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Питання для контролю знань

1. Основні риси найпростішого потоку.
2. Поняття: система масового обслуговування, канал обслугову-
вання,
заявки (вимоги), вхідний потік, вихідний потік.
3. Потужність вхідного потоку.
4. Потужність роботи одного каналу.
5. Потужність вихідного потоку.
6. Стани системи та їх ймовірності.
7. Переходи системи з одного стану до іншого.
8. Принцип роботи СМО з відмовами.
9. Ймовірність того, що заявка отримає відмову.
10. Ймовірність того, що заявка буде прийнята до обслуговуван-
ня.

11. Середня кількість заявок, які мають обслуговування.
12. Абсолютна пропускна здібність системи.
13. Середній час перебування заявки у системі на обслуговуванні.
14. Середній час простою системи.
15. Середній час повного навантаження системи.
16. Надати два приклади СМО з відмовами.
17. Принципи роботи СМО з очікуванням.
18. Можливі дисципліни черги (дисципліна поведінки заявки у черзі та дисципліна обслуговування заявки з черги).
19. Найпростіша модель СМО з чергою.
20. Середня кількість заявок у черзі.
21. Середній час перебування заявки в черзі.
22. Надати умову стаціонарного режиму роботи системи (черга не зростає нескінченно).
23. Середній час перебування заявки в системі.
24. Порівняння ефективності роботи СМО з відмовами та з чергою за основними показниками, якщо обидві СМО мають однакові параметри (***n, λ, μ)***.
25. Приклади СМО з очікуванням.

3.2. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Призначення та сфери застосування

Управління товарними запасами – складний комплекс заходів, спрямований на забезпечення максимально високого рівня обслуговування покупців при мінімізації поточних витрат, пов'язаних із утримуванням ***запасів.***

Управління запасами можна звести до відповіді на два основних питання: коли поповнювати запас і в якій кількості. Найпростішою моделлю керування запасами є ***формула оптимального розміру партії*** або ***формула Вільсона***.

Рішення про кількість товарних запасів впливає на задоволення потреб покупців. Так, торговому підприємству необхідні запаси товарів, достатні для негайного виконання всіх замовлень клієнтів. Однак зберігання таких великих запасів для підприємства не рентабельно. З підвищенням рівня сервісу для клієнтів витрати на зберігання товарних запасів стрімко зростають. Тому необхідно визначити саме оптимальний розмір запасів. Тільки після цього можна приймати рішення про доцільність замовлення додаткових партій товарів, визначити їх кількість і вирішувати проблеми, що пов'язані з управлінням товарними запасами .

В економічній літературі розглядаються різні проблеми управління товарними запасами на підприємствах торгівлі. Визначені показники, що характеризують стан товарних запасів; фактори, що обумовлюють розмір і швидкість обороту товарних запасів; стратегії управління товарними запасами; методика аналізу товарних запасів; методика оцінки ефективності управління товарними запасами і планування товарних запасів.

Рекомендації по вирішенню цих проблем можуть успішно використовуватися в управлінні комерційною діяльністю торгових підприємств. Але для попередження витрат на підприємствах торгівлі і підвищення ефективності їх комерційної діяльності доцільно вдосконалювати систему, процес і методи управління товарними запасами. Необхідність у цьому обумовлюється наступними причинами.

Перш за все, попит на товари може бути відомий тільки з визначеною вірогідністю і лише в окремих випадках і протягом невеликого періоду часу може залишатися постійним. Чим більший прогнозований період захоплюється, тим вища потенційна можливість відхилень прогнозів попиту від його фактичних значень.

Це пояснюється тим, що в екстраполяції динаміки і тенденцій зміни попиту з використанням різних методів і моделей його прогнозування очікуються певна стійкість умов формування попиту.

Отже, запаси створюються для задоволення попиту, тому життєво важливо мати досить точну оцінку обсягу і часу попиту. Точно так само необхідно знати час виконання замовлення, а також у якій мірі можуть мінятися показники попиту і терміни виконання замовлення (час між подачею заявки й одержанням замовлення).

Тому ***основна мета управління запасами*** – досягти задовільного рівня обслуговування споживачів, у той же час, утримуючи витрати на підтримку запасів у розумних межах.

У сучасній теорії поняття товарних запасів підприємств роздрібної торгівлі розглядається з різних боків, в залежності від того, об'єктом якого функціонального управління вони є. Кожен з цих підходів розглядає лише сутнісні характеристики цього поняття, що не дає змогу ідентифікувати його як цілісний об'єкт управління з позицій системності, а й відповідно приймати найбільш ефективні комплексні управлінські рішення, спрямовані на забезпечення стійкого економічного підприємства та збільшення його ринкової вартості.

Витрати в системі управління запасами

Практична реалізація концепції управління матеріальними потоками пов'язана з оптимізацією сукупних запасів. Критерієм оптимізації запасів є загальні витрати на виконання замовлень і зберігання матеріалів. У системі закупівлі і зберігання матеріалів витрати діляться на наступні групи:

- витрати на виконання замовлення;
- прямі витрати, визначені закупівельною ціною;
- витрати на зберігання запасів;
- "витрати дефіциту".

Витрати на виконання замовлення пов'язані з розміщенням і постачанням замовлення. До їх числа відносяться такі статті витрат, як вартість розробки умов постачання і їх підготовка до завантаження; витрати з придбання рекламних каталогів; витрати, пов'язані з контролем виконання замовлення і скороченням терміну їх виконання; транспортні витрати, якщо вартість транспортування не входить у вартість отримуваного товару; витрати на складування і отримання замовлення.

Деякі з них фіксуються в замовленні і не залежать від обсягу, інші, наприклад транспортні і складські витрати, знаходяться в прямій залежності від величини замовлення.

В цілому витрати на виконання замовлення включають будь-які види витрат, обсяг яких залежить від числа виконуваних замовлень.

Прямі витрати визначаються ціною закуплених матеріалів і змінюються залежно від оптової скидки до ціни, яка встановлюється при збільшенні розміру партії замовлення.

Витрати на зберігання запасів визначаються витратами на зберігання матеріалів і самим фактом наявності запасів. До цієї групи витрат входять такі статті витрат, як можливий відсоток на капітал, вкладений в запаси; витрати на складські операції і плата за використання або оренду складу; поточні витрати на утримання складів, що належать виробничій одиниці; витрати, пов'язані з ризиком псування і морального старіння матеріалів, а також страхові і податкові витрати. Зниження запасів призводить до зменшення складських витрат і поточних витрат на утримання складських приміщень.

"Витрати дефіциту" є витратами, що виникають у зв'язку з обмеженістю в якийсь період тих або інших матеріальних ресурсів. До цієї групи витрат відносять втрати трьох видів :

- втрати у виробництві, пов'язані з призупиненням виробничого процесу через відсутність необхідних матеріалів, а також заміною матеріалу на іншій за вищою ціною;
- вартість втрачених продажів у разі невиконання замовлення, якщо замовник звертається до іншого виробника (у такій ситуації витрачання дефіциту визначаються як втрати прибули);
- додаткові витрати, що виникають у разі очікування виконання замовлення.

Складські витрати укрупнено розраховують по загальній нормі, яка враховує співвідношення постійної і змінної частини витрат. Норма складських витрат складає

$$H = A + B,$$

де ***Н*** – норма складських витрат;

А – процентна ставка на вкладений в запаси капітал;

В – норма витрат по збереженню матеріалів на складі.

$$B = \frac{Г}{Д} \cdot 100,$$

де ***Г*** – витрати по збереженню матеріалів на складі за певний період;

Д – середня вартість складського запасу.

Товарні запаси перебувають у постійному русі й оновленні. Кінцевою стадією руху є вжиток, причому на місце спожитих товарів виробництво поставляє нові. Товари протягом більшого або меншого часу утворюють запас, поки їх не замінять нові екземпляри того ж виду. Лише за допомогою такого утворення запасу забезпечується постійність і безперервність процесу обороту.

Відповідно до асортиментних переліків мають утворюватися й товарні запаси, ідентичні за своєю структурою. Їх необхідно відновлювати шляхом регульованого завезення товарів.

Товарні запаси на торговельних підприємствах повинні формувати реальну пропозицію товарів, що забезпечує їх безперебійний продаж. У процесі реалізації товарні запаси витрачаються й замість тих, що вибувають, мають завозитися нові, відповідні за своєю структурою й кількістю необхідному асортименту. Інакше порушується стійкість сформованого асортименту та створюються несприятливі умови, наслідком яких буде недоотримання прибутку підприємством, погіршення обслуговування покупців.

Необхідність формування товарних запасів обумовлена такими причинами:

- час, необхідний для транспортування товарів від місця виробництва до місця продажу, включаючи час на вантаження-розвантаження;
- сезонні коливання щодо виробництва та вжитку товарів;
- невідповідність між виробничим і торговельним асортиментом товарів, що спричиняє необхідність тієї, що підсортувала, упаковки і підробки;
- особливості територіального розміщення виробництва;
- умови транспортування товарів, відстань між постачальником і торговельним підприємством;
- умови реалізації товарів;
- інтервали завезення товарів;
- рух товару;
- стан матеріально-технічної бази торгівлі, що забезпечує можливості для зберігання товару.

Основною метою управління товарними запасами є формування й підтримка їх величини на такому рівні, який дозволяє забезпечити безперебійну торгівлю кожним товаром за умов мінімальних витрат. Для досягнення цієї мети керівники або менеджери підприємства повинні вести облік товарних запасів, визначити, скільки треба зберігати запасів, коли розміщувати замовлення та скільки замовляти одиниць товару за один раз.

Від керівників і менеджерів торговельного підприємства потрібне вміння не лише визначати необхідну величину запасів, але й розробляти графіки постачань, розраховувати оптимальні партії нових замовлень, добиватися ув'язки обсягу продажів із величиною запасів, за необхідності організовувати складування запасів, брати до уваги вимоги логістики та маркетингу, постійно проводити фінансовий аналіз потреб у запасах, розраховувати витрати, пов'язані із запасами, та враховувати політику у сфері цін.

Параметри систем управління запасами

Основним параметром системи керування товарними запасами є ***попит***. У реальності попит, найчастіше, має випадковий характер.

Використання моделей керування запасами, для яких попит – відома величина, обмежено.

Залежно від характеру товару й ступеня лояльності споживача можна виділити два типи реакції покупця на ***дефіцит***. У першому випадку незадоволені вимоги стають на облік, тобто покупець погоджується почекати поставки товару (Рис. 3.2.1). У другому випадку незадоволені вимоги губляться, тобто покупець задовольняє потребу у відсутньому товарі з іншого джерела (Рис. 3.4).

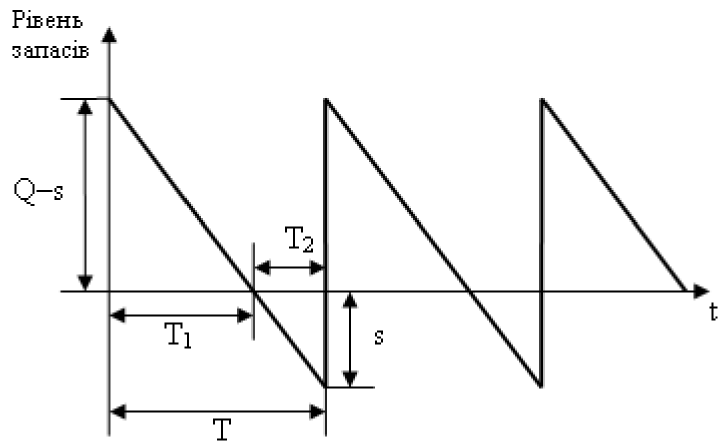


Рис. 3.2.1. Рівень запасу в системі з урахуванням незадоволених вимог.

На даному рисунку ***s*** – число вимог, зареєстрованих до моменту поставки, **Т1** – час протягом якого надійдуть вимоги на (***Q – s***) одиниць, а **Т2** – час, коли вимоги стають на облік.

Середні річні витрати (TCU) і оптимальний розмір замовлення (Q*) визначаються за такими формулами:

$$TCU(Q) = \frac{\lambda}{Q} \cdot K + \frac{h}{2Q}(Q - s)^2 + \frac{Ps^2}{2Q}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h}} \cdot \sqrt{\frac{P + h}{P}}$$

де λ – інтенсивність попиту.

Графічно поводження системи із втратою незадоволених вимог представлено на рис .3.2.2

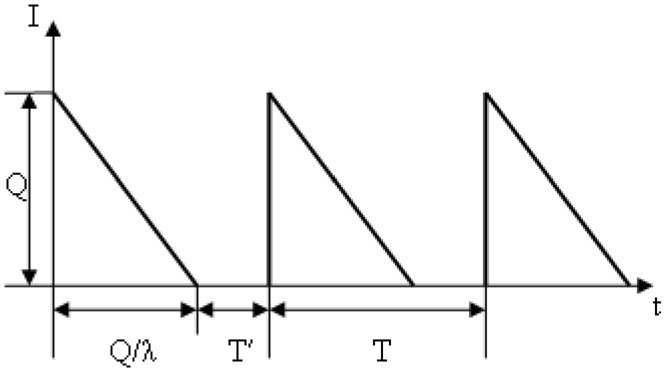


Рис. 3.2.2. Рівень запасу в системі із втратою незадоволених вимог.

T' – час, протягом якого незадоволені вимоги губляться.

Середні витрати й оптимальний розмір замовлення визначаються за формулами:

$$TCU(Q) = \frac{\lambda K}{Q + \lambda T'} + \frac{h}{2} \cdot \frac{Q^2}{Q + \lambda T'} + \frac{G\lambda}{Q + \lambda T'} \cdot \lambda T'$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda K}{h} \cdot \frac{G}{h + G}}$$

Часто в системах керування запасами передбачається що частина запасу губиться, а частина – враховується. Для цього вводиться коефіцієнт β – частка незадоволеного ***попиту***, що може бути врахована.

Знижка на розмір замовлення буває двох видів:

- «оптова» знижка;
- диференціальна знижка.

«Оптова» знижки поширюється на кожну одиницю закуповуваного товару залежно від загального обсягу партії. Для системи з «оптовою» знижкою при розмірі закупівлі рівному

$$Q, q_i \le Q < q_{i+1},$$

ціна товару для кожної одиниці партії дорівнює C_i, причому

$$C_{i+1} < C_i.$$

Середні річні витрати визначаються як:

$$TCU_i(Q) = \frac{\lambda K}{Q} + \frac{h \cdot Q}{2} + \lambda C_i, \qquad q_i \leq Q < q_{i+1}$$

Графічно середні річні витрати представлені на рис.3.2.3.

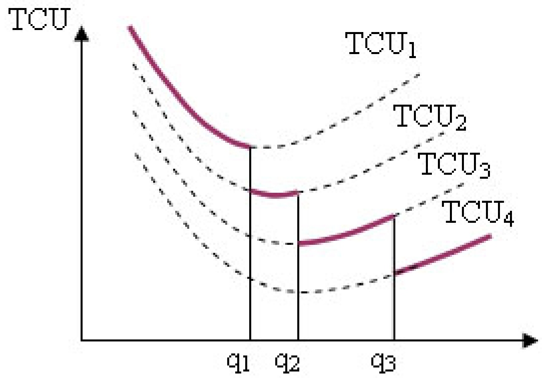


Рис. 3.2.3. Середні річні витрати при оптовій знижці.

Для визначення оптимального розміру партії пропонується наступний ***алгоритм***:

1. Обчислюється Q_n. Якщо $Q_n \geq q_{n-1}$, то Q_n – оптимально.
2. Якщо $Q_n < q_{n-1}$, то обчислюється Q_{n-1}. Якщо $Q_{n-1} \geq q_{n-2}$, то $TCU(Q_{n-1})$ порівнюється з $TCU(q_{n-1})$, і мінімум з них відповідає оптимальному розміру замовлення.
3. Якщо $Q_{n-1} < q_{n-2}$, то обчислюється Q_{n-2}. Якщо $Q_{n-2} \geq q_{n-3}$, то $TCU(Q_{n-2})$ порівнюється з $TCU(q_{n-3})$ і $TCU(q_{n-1})$, і мінімум з них відповідає оптимальному розміру замовлення.
4. Обчислення тривають доти, поки не відшукується мінімум. Потрібно не більше ***n*** кроків.

Диференціальна знижка поширюється на кожну наступну одиницю закуповуваного товару, що перевищує певний обсяг замовлення.

Диференціальна знижка полягає в тому, що якщо розмір замовлення коливається від 1 до q_1, то вартість одиниці виробу складе c_0, при розмірі замовлення від $q_1 + 1$ до q_2 вартість складе c_0 для q_1 одиниць товару й c_1 для $(Q - q_1)$ одиниць товару й т. д.

Середні річні витрати при $q_i < Q \leq q_{i+1}$ визначаються за наступною формулою:

$$TCU_i = \lambda \cdot C_i + \frac{\lambda}{Q}(K + R_i - C_i q_i) + \frac{IR_i}{2} + h\left(\frac{Q - q_i}{2}\right), \qquad i = [0, m]$$

де R_i – витрати на закупівлю q_i одиниць виробу, $R_0 = 0, q_0 = 0, q_{m+1} = \propto$.

$$C(Q) = R_i + C_i(Q - q_i), \qquad i = [0, m].$$

Графік середніх річних витрат зображений на рис.3.2.4.

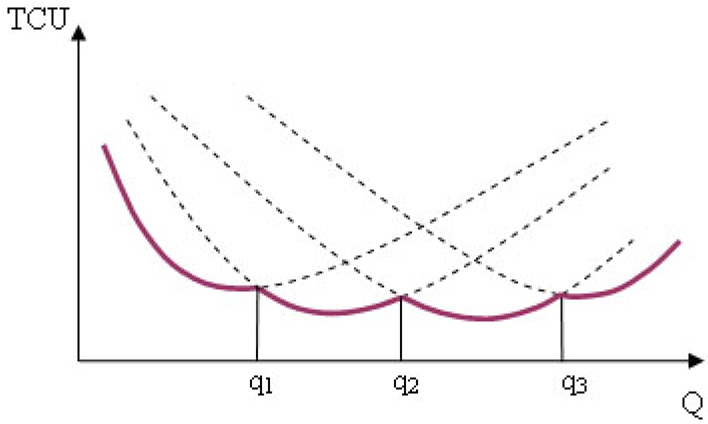


Рис.3.2.4. Середні річні витрати при диференціальній знижці.

Для обчислення Q оптимального використається наступний ***алгоритм***:

1. Обчислюються значення $Q^{(i)}$:

$$Q^{(i)} = \sqrt{\frac{2\lambda(K + R_i - c_i q_i)}{h}}$$

2. Для значень $Q^{(i)}$, що задовольняють умові $q_i < Q^{(i)} \leq q_{i+1}$ визначається значення $TCU(Q^{(i)})$.
3. Оптимальним буде $Q^{(i)}$, що відповідає мінімальним витратам.

Обмежений строк зберігання товару характерний для більшості товарів роздрібної торгівлі. Це можуть бути товари які поступово, за час зберігання гублять свої споживчі якості (наприклад фрукти), так і товари, які не будучи реалізованими за певний строк повністю втратять споживчі якості (наприклад газети).

Управління запасами товарів з обмеженим строком придатності відбувається в такий спосіб:

- визначається оптимальний розмір замовлення (з урахуванням витрат на зберігання, на дефіцит і списання застарілих товарів) і подається замовлення на поповнення запасу;
- весь прибулий продукт уважається новим;
- відпускання товару провадиться за принципом «перший прийшов – перший вийшов»;
- продукт, не реалізований протягом строку зберігання, m, списується.

Для точного опису наявного запасу в кожен момент часу й рівня запасів у системі (U) використовуються такі формули:

$$\begin{cases} x_{mt} = (Q_t)^+ \\ \left(x_{i+1,t-1} - \left[d - \sum_{j=1}^{i} x_{j,t-1}\right]^+\right)^+, \qquad i = [1, m-1] \end{cases}$$

$$U_t = \sum_{i=1}^{m} x_{i,t}$$

де $x_{i,t}$ – кількість ***запасів*** на момент часу ***t*** зі строком зберігання, що залишився, рівним і;

m – строк придатності продукту;

d – попит на товар;

$(a)^+ = max(0, a)$.

Тоді, для системи керування запасами з постійним контролем можна вивести співвідношення, що дозволяє визначити середні витрати в одиницю часу і:

$$TCU(i) = \frac{d_i}{Q}K + C \cdot d_i - B \cdot \beta(d_i - U_i)^+ + G(1-\beta)(d_i - U_i)^+ - W(x_{1,i} - d_i)^+ + h(U_i - d_i)^+$$

де d_i – попит на товар за час ***і***.

При ***взаємодії декількох товарів у системі*** виникають такі задачі управління запасами:

- задача сполучення замовлень за декількома номенклатура ми (загальний постачальник);
- багатономенклатурні задачі управління запасами із взаємозамінними продуктами;

- багатономенклатурні задачі управління запасами з обмеженнями (на площу складу, на кількість капіталовкладень у формування запасів, на загальне число замовлень).

Класифікація систем управління запасами

Статична детермінована модель без дефіциту

Умова: запас продукту, що зберігається, дорівнює попиту на цей продукт протягом певного часу.

Особливості моделі. Запас продукту утворюється партіями. Ці партії закупівлі товару (продукту):

1) однакові за обсягом;
2) споживаються протягом однакового часу;
3) споживаються рівномірно;
4) одразу, на момент зникнення партії, товар з'являється в обсязі нової партії.

Позначення

Q – потреба у продукті за весь час ΔT, що розглядається;
q – обсяг партії товару;
T – час споживання однієї партії q;
$\boldsymbol{n = \frac{Q}{q} = \frac{\Delta T}{T}}$ – кількість партії за весь час ΔT;
$\boldsymbol{C}_{утв}$ – витрати на утворення запасу протягом часу ΔT;
$\boldsymbol{C}_{збер}$ – витрати на зберігання товару протягом часу ΔT;
$\boldsymbol{C} = C_{утв} + C_{збер}$ – загальні витрати за весь час ΔT;
$\boldsymbol{c}_{утв}$ – витрати на утворення однієї партії товару;
$\boldsymbol{c}_{збер}$ – витрати на зберігання одиниці продукту за одиницю часу.
Модель можна зобразити графічно так (Рис.3.2.5.)

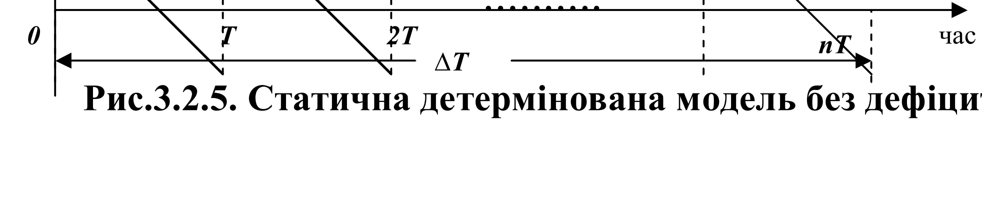


Рис.3.2.5. Статична детермінована модель без дефіциту

Постановка задачі . Необхідно визначити розмір партії, кількість партій протягом всього часу $\Delta \boldsymbol{T}$ та час споживання однієї партії такими, при яких буде мінімальна загальна вартість $\boldsymbol{C}$. Назвемо такий розмір партій оптимальним $\boldsymbol{q_{opt}}$, кількість партій $\boldsymbol{n_{opt}}$ та час споживання оптимальної партії $\boldsymbol{T_{opt}}$. Це є оптимізаційна задача за критерієм ***min C***.

Маємо

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2c_{утв} \cdot Q}{c_{збер} \cdot \Delta T}}, \qquad n_{opt} = \frac{Q}{q_{opt}}, \qquad T_{opt} = \frac{\Delta T}{n_{opt}}$$

Припустимо, що партія товару, яка пропонується для закупівлі, відхиляється на величину Δq від розрахункового розміру $\boldsymbol{q_{opt}}$ (або у %, наприклад, на 10 %). Тоді оцінюватиме, на скільки відсотків збільшиться загальна вартість $\boldsymbol{C}$ в порівнянні із $\min C$:

$$\frac{\Delta C}{C_{\min}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta q}{q_{opt}}\right)^2.$$

Наприклад, якщо

$$\frac{\Delta q}{q_{opt}} = 0{,}1 \text{ (або 10\%), тоді}$$

$$\frac{\Delta C}{C_{\min}} = \frac{1}{2}(0{,}1)^2 = 0{,}005 \text{ (або 0,5 \%),}$$

тобто загальна вартість утворення та зберігання товару протягом всього часу $\Delta \boldsymbol{T}$ буде більша за мінімальну вартість на 0,5 %.

Статична детермінована модель з дефіцитом

Постановка задачі: запас продукту, що зберігається, менший за попит на цей продукт протягом певного часу.

Особливості моделі. Запас продукту утворюється партіями, як у попередній моделі. Але протягом часу T від початку споживання партії товару до появи нової партії є деякий інтервал часу Δt, коли продукту вже немає при наявності попиту. Графічно таку модель можна зобразити так (Рис.3.2.6.):

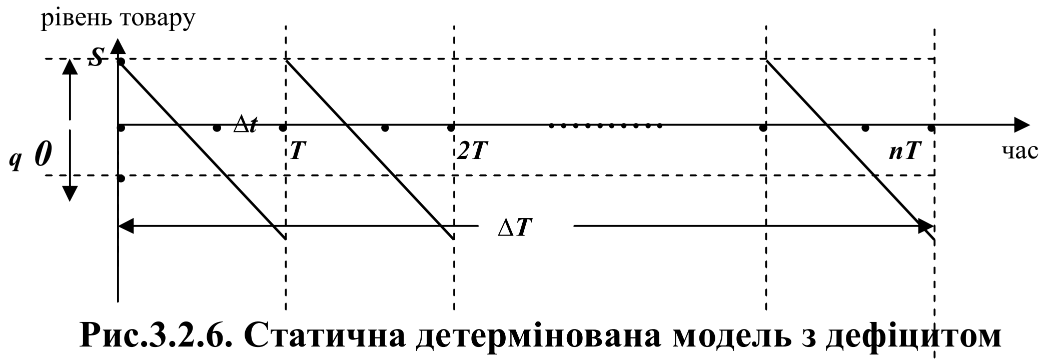


Рис.3.2.6. Статична детермінована модель з дефіцитом

Позначення

$C_{деф}$ – збитки („штраф”) за дефіцит товару за весь час ΔT;

$C = C_{утв} + C_{збер} + C_{деф}$ – загальна вартість;

$c_{деф}$ – збитки („штраф”) за дефіцит одиниці товару на протязі одиниці часу;

S – запас товару;

Δt – інтервал часу, на протязі якого можливий дефіцит товару;

$(q\text{-}S)$ – дефіцит товару, який накопичується за час Δt;

$\rho = \dfrac{c_{деф}}{c_{збер} + c_{деф}}$ – густина збитків за незадоволення попиту $(0 \le \rho \le 1)$.

Якщо ρ поблизу 1, це означає, що дефіцит у цій системі виробництва або торгівлі є недозволений, бо він дає дуже великі збитки ($c_{деф}$ значно більше за $c_{збер}$).

Постановка задачі. Необхідно визначити розмір партії q_{opt}, кількість партій n_{opt}, час між двома партіями постачання товару T_{opt} та розмір запасу S_{opt} такими, при яких буде мінімальна загальна вартість C. Маємо

$$q_{opt}^{деф} = \sqrt{\frac{2c_{утв} \cdot Q}{c_{збер} \cdot \Delta T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}} = q_{opt}^{без\ деф} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}},$$

$$T_{opt}^{деф} = T_{opt}^{без\ деф} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \qquad n_{opt}^{деф} = \frac{\Delta T}{T_{opt}^{деф}}, \quad S_{opt} = q_{opt}^{деф} \cdot \rho,$$

$$\frac{\Delta t}{T_{opt}} = (1 - \rho) \cdot 100\ \%\ ,$$

$$\Delta t = T_{opt}(1-\rho)\cdot 100\%.$$

Система з фіксованим періодом перевірки рівня запасу (модель із періодичними перевірками)

У системах з періодичною перевіркою, періодом функціонування ***T*** вважається інтервал між двома послідовними перевірками. Замовлення на поповнення запасу подається в момент перевірки, якщо попит за попередній період функціонування відмінний від нуля.

Розглядаються такі моделі керування запасами при періодичних перевірках:

- ***<R, T>*** – модель, заснована на ***R***-стратегії: у момент перевірки замовляється партія, що доводить фіктивних рівень запасів (тобто сума наявного запасу та замовленого) до рівня ***R***;
- ***<R, r, T>*** – модель, заснована на ***Rr***-стратегії: замовлення на поповнення запасу до рівня R подається, якщо в момент перевірки фіктивний рівень запасів у системі менше або дорівнює r;
- ***<n, r, T>*** – модель, заснована на ***nQ***-стратегії: замовлення на поповнення запасу подається, якщо в момент перевірки фіктивний рівень запасів у системі менше або дорівнює r. Обсяг партії замовлення кратний деякій фіксованій величині ***Q, n*** – найбільше ціле число, для якого фіктивний рівень запасів після подачі замовлення виявляється меншим або рівним (Рис.3.2.7.).

$$R = r + Q.$$

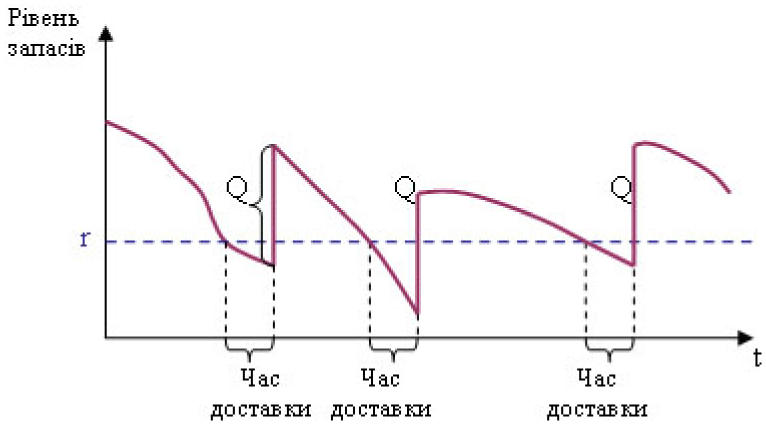


Рис.3.2.7. Q,r модель керування запасами при випадковому попиті.

Ефективність управління товарними запасами

Ефективність управління товарними запасами підприємства обумовлюються багатьма чинниками – як зовнішніми, що не залежать від діяльності підприємства, так і внутрішніми, на які підприємство може та повинно активно впливати. До зовнішніх чинників належить загальний стан економічної ситуації в країні та регіоні, особливості та нестабільність податкового законодавства, умови надання кредитів та процентні ставки, наявність цільового фінансування.

Однак не меншу роль відіграють внутрішні чинники, які підприємство має активно використовувати з метою підвищення ефективності використання обігових коштів.

При оцінці стану товарних запасів зазвичай використовують лише горизонтальний і вертикальний аналіз, а також показники їх оборотності. У статті для виявлення тенденції зміни структури запасів у загальній вартості оборотних коштів досліджуваних підприємств проведено вирівнювання динамічних рядів з використанням аналітичного рівняння лінійної регресії, що дало змогу оцінити ефективність їх управлінням.

Аналіз товарних запасів включає такі ***етапи***:

1. Розглядаються суми товарних запасів – темпи їх динаміки, питома вага в обсязі оборотних активів.
2. Вивчається структура запасів у розрізі їх видів і основних груп.
3. Вивчається ефективність використання різних видів і груп запасів і їх обсягу в цілому, яка характеризується показниками їх оборотності.

Правильне управління товарними запасами суттєво впливає на фінансовий стан торговельного підприємства. Присутність або відсутність товарних запасів веде за собою як доходи, так і витрати. Кожне підприємство вибирає форму управління товарними запасами, виходячи з особистих потреб і поточного стану споживчого попиту. Ефективний механізм управління товарними запасами торговельного підприємства дає змогу в повному обсязі реалізувати цілі та завдання, які стоять перед ним; сприяє результативному здійсненню всіх його функцій на підприємствах торгівлі.

Питання для контролю знань

1. Які основні риси моделі управління запасами без дефіциту?
2. Як зрозуміти поняття дефіцит?
3. Які складові загальної вартості продукту при відсутності дефіциту?
4. Які складові загальної вартості продукту за наявністю дефіциту?
5. За яким критерієм розраховується оптимальний розмір партії продукту?
6. Як впливає відхилення обсягу партії від оптимальної на загальну вартість?
7. Як зрозуміти величину „вартість за дефіцит”?
8. Як зрозуміти густину збитків за дефіцит?
9. Як впливає наявність дефіциту на оптимальний розмір партії?
10. Як формулюється задача управління запасами? Чому виникає необхідність постачати продукт партіями?

3.3. ЗАДАЧІ УПОРЯДКУВАННЯ ТА КООРДИНАЦІЇ. СІТЬОВЕ ПЛАНУВАННЯ

Зміст та сфери використання сітьових методів планування та управління

У практичній діяльності людині доводиться зустрічатися з проблемами визначення послідовності виконання робіт або їх упорядкуванням, а також координацією дій в часі, з встановленням періоду часу (або моменту часу), на протязі якого (або до якого) повинні бути виконані конкретні роботи.

В умовах повної визначеності календарне планування і упорядкування часто взаємозамінні, оскільки всі параметри системи відомі, і роботи починають виконуватися відразу, як тільки це стає можливим. У тих випадках, коли по відношенню до параметрів системи існує деяка невизначеність, календарне планування зводиться до встановлення послідовності виконання робіт.

Основою класифікації задач календарного планування є уявлення про виробничу дільницю виконання робіт. Вперше процес виконання робіт виробничою дільницею досліджували американські вчені Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Міллер в 70-х рр. XX ст.

Узагальнена задача календарного планування полягає у визначенні такої послідовності робіт, при якій мінімізується або максимізується деяка функція цілі, яка залежить від цієї послідовності при умові, що операції виконуються відповідно до технологічних вимог до процесу виконання робіт на даній дільниці.

На даний час запорукою конкурентоспроможності цілих галузей є необхідність розробки ефективних методів планування та управління, які б давали можливість оцінити змінний стан системи та передбачити її майбутнє, щоб оптимізувати відповідний процес і керувати його перебігом. Системи об'єктів дослідження разом зі зв'язками між ними називаються ***мережею.***

Діапазон реального існування мереж дуже широкий: мережі електропостачання, радіо- та телекомунікацій, транспортні (залізничні, автомобільні), об'єкти господарювання як в одному господарстві, так і в їх комплексі, плани виконання робіт з реалізації певних проектів і т. ін. Але прикладами таких систем можуть бути також організація поточного виробництва, реконструкція існуючого виробництва, організація капітального будівництва, реконструкція та ремонт існуючих споруд, організація науково-дослідних робіт і т. ін., де також необхідно узгоджувати та оцінювати зв'язки між окремими елементами.

Методи планування та управління мережею забезпечують:

- складання календарного плану виконання певного комплексу робіт;
- оцінку необхідних трудових, матеріальних та фінансових ресурсів, затрат часу;
- контроль комплексу робіт з прогнозуванням і запобіганням можливих зривів при виконанні робіт;
- ефективне управління при чіткому розподілі відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт;
- оцінку дієздатності та якості системи стосовно певних критеріїв.

Для одних систем зв'язки між об'єктами <u>реалізовані фізично</u> (система комунікацій між населеними пунктами), для інших мають інформаційний характер або є поєднанням як фізичної реалізації, так і інформаційної.

Математичний апарат, який використовується при дослідженні мереж, розроблений у так званій теорії графів.

Елементи сітьового графіка, методика його побудови

Основні поняття теорії графів

Побудова математичних моделей розв’язання вказаних задач планування та управління мережами ґрунтується на дослідженні попарних ***(бінарних***) зв’язків між об’єктами, які утворюють систему дослідження. Графічне зображення множини досліджуваних об’єктів і зв’язків між ними називається ***графом.***

Граф доцільно зображати у вигляді діаграми. На діаграмі об’єкти зображаються пронумерованими точками або кружками, які називаються вершинами, зв’язки між об’єктами -відрізками ліній, які з’єднують відповідні об’єкти. Якщо зв’язок між двома об’єктами ***А*** та ***В*** однобічний (від *А* до *В* є зв’язок, а зворотний зв’язок відсутній), то це зображається орієнтованим відрізком, стрілка якого відповідає напрямку зв’язку.

Такий однобічний орієнтований відрізок називається ***дугою*** *,* а графічне зображення неорієнтованих попарних зв’язків між об’єктами – ***ребрами*** (ситуація, коли об’єкт *А* може бути пов’язаний з об’єктом *В* і навпаки).

У подальшому ми не будемо в термінології відрізняти поняття графу та його діаграми. Граф, вершини якого мають лише однобічний зв’язки, називається ***орієнтованим*** *,* або ***орграфом*** .

Приклади графів

1. Карта автомобільних доріг є граф, вершини якого – населені пункти, а зв’язки (ребра або дуги у випадку однобічного руху дороги, які з’єднують населені пункти.

2. При розв’язанні задач технічної діагностики (наприклад, при пошуку зіпсованого елемента) досліджувану систему умовно поділяють на кілька взаємопов’язаних частин, кожна з яких виконує певну функцію.

Схему функціонування такої системи зручно зобразити як орієнтований граф, вершинами якого будуть виділені частини системи, а дугами – функціональні зв’язки між цими частинами.

Граф вважається ***завантаженим*** *,* якщо він визначений разом з певною функцією на множині його ребер або дуг. Така функція може визначати віддаль між вершинами (карта доріг), час або вартість перевезень між населеними пунктами, пропускну спроможність лінії електропередач або каналу системи зрошення.

Маршрутом називається така послідовність ребер, коли кожна пара сусідніх ребер має одну загальну вершину.

Простим ланцюгом називається маршрут, в якому вершини не повторюються. Будемо користуватися лише простими ланцюгами, опускаючи слово простий.

Ланцюг визначається послідовністю вершин, через які він проходить.

Цикл – це ланцюг, початкова вершина якого співпадає з кінцевою.

Шляхом називається орієнтований ланцюг. Отже, поняття “шлях”стосується лише орієнтованих графів.

Побудова правильної нумерації вершин графу

Взагалі вершини графу можна нумерувати довільно, але для розв’язання багатьох практичних задач зручно виконати так звану правильну нумерацію вершин. За такої нумерації будь-який шлях від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером буде проходити лише через вершини зі зростаючими номерами. Правильна нумерація вершин виконується за так званим “алгоритмом ви креслення дуг”.

Доцільно описати зміст цього алгоритму, пояснюючи його етапи стосовно завантаженого графу, зображеного на рис.4.1., для якого у квадратах наводиться деяка довільна нумерація вершин.

Отже, на першому етапі, умовно виділимо всі дуги, які виходять з початкової вершини, назвемо її вершиною ***нульового рангу*** та дамо їй номер “00” ***(V_{00}).*** Тепер розглянемо вершини, в які не заходять інші дуги, окрім викреслених. Такі вершини назвемо вершинами ***1-го рангу*** та пронумеруємо їх у довільному порядку, дотримуючись неперервності в нумерації. За цих умов кожній вершині будемо надавати два індекси: перший – ранг вершини, другий – її порядковий номер серед множини вершин однакового рангу. На графові (рис. 4.1) маємо одну вершину “11***”(V_{11})*** першого рангу.

На другому етапі умовно викреслимо всі дуги, які виходять з вершин 1-го рангу. Вершини, в які не заходять інші дуги, окрім уже позначених, назвемо вершинами 2-го рангу та пронумеруємо їх у довільній послідовності, зберігаючи неперервність в нумерації стосовно раніше використаних чисел натурального ряду. Для графу(рис. 3.3.1.) це вершини “22***”(V_{22})*** та "23" ***(V_{23}).***

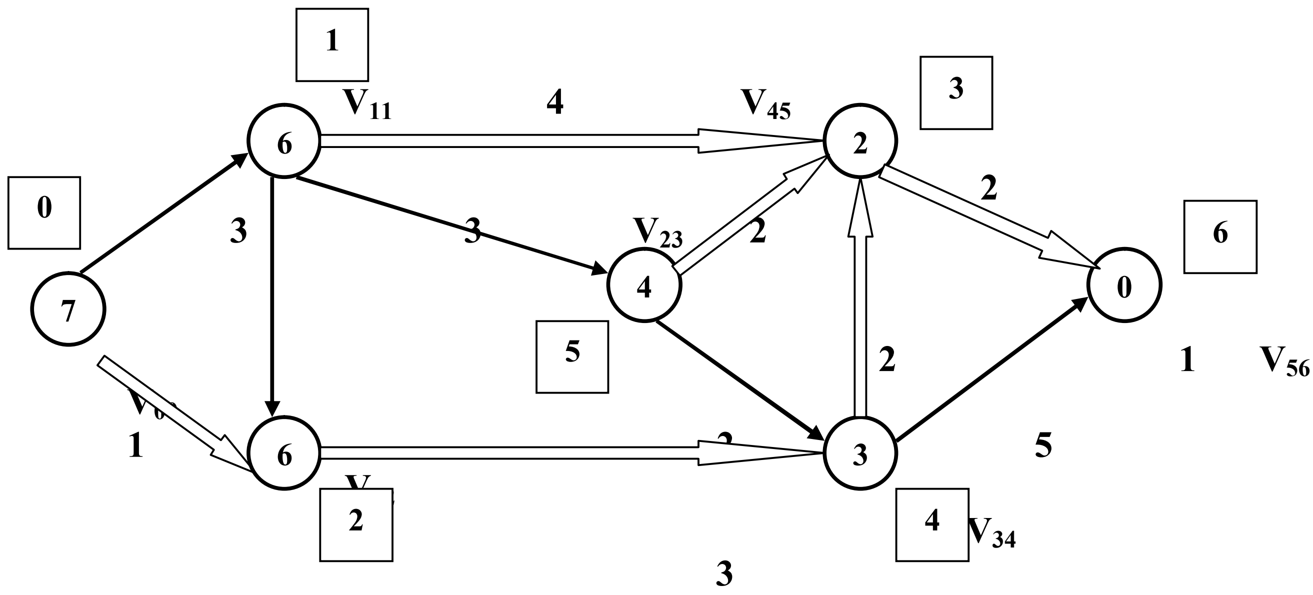


Рис.3.3.1. Приклад орієнтованого графу

Припустимо, пройдений **n-1** етап і визначено вершини (**n-1**)-го рангу. Викреслимо всі дуги, які виходять з вершин **(n-1)-**го рангу. Розглянемо всі вершини, в яких закінчуються викреслені на цьому етапі дуги. Вершини, в які заходять лише дуги, визначені на (**n-1**)-му етапі, утворюють множину вершин ***n***-го рангу. Пронумеруємо їх у довільному порядку, використовуючи неперервно числа натурального ряду, починаючи з найменшого, яке не було використане для нумерації вершин *(***n-1***)-го* рангу.

Алгоритм завершується по досягненні кінцевої вершини. Для нашого прикладу (рис. 4.1) це вершина “56***”(*** V_{56}), де індекс 5 означає ранг кінцевої вершини, а індекс 6 - її порядковий номер. Виконавши правильно нумерацію вершин графу, в подальшому індекс рангу вершини можна не вказувати. Алгоритм правильної нумерації вершин графу може бути представлений по-іншому.

Алгоритм пошуку найкоротшого шляху мережі (графу)

Виконавши правильну нумерацію графу мережі, можна ефективно реалізувати алгоритм пошуку найкоротшого шляху між заданими вершинами. Реалізацію алгоритму приведено до побудови послідовності шляхів з однієї дуги, двох дуг, трьох дуг і т. д., які з’єднують вершини певного рангу з кінцевою вершиною. При цьому перегляд вершин виконується в послідовності зменшення їх номерів.

На кожному етапі алгоритму відбувається перехід від вершини більш високого рангу до вершини меншого рангу за умови, що із множини всіх шляхів, які починаються в одній і тій же вершині, необхідно залишити для наступного кроку реалізації алгоритму лише найкоротший шлях від цієї вершини до завершальної. За правильної нумерації вершин такий упорядкований перехід у послідовності зменшення рангів відбувається автоматично, навіть за умови, коли нумерацію рангів вершин опущено.

Розглянемо реалізацію алгоритму на прикладі графу, зображеного на рис. 3.3.1.

Згідно з алгоритмом будемо рухатися від кінцевої вершини V_{56} до початкової V_{00}, крокуючи послідовно від вершин більш високого рангу до вершин меншого рангу. У кружках, які зображають вершини графу, будемо записувати найкоротшу віддаль від вершини (***n***-**l**)-го рангу до кінцевої вершини.

Одночасно найкоротший шлях від кожної вершини до кінцевої будемо відмічати подвійною стрілкою. У кружку останньої кінцевої вершини V_{56} записуємо “0”, бо звідси виконуємо відлік віддалі.

Потім переходимо до вершини 4-го рангу – в прикладі це вершина V_{45}. Від цієї вершини в кінцеву маємо лише один шлях: (V_{45}, V_{56}) , його довжина дорівнює двом одиницям виміру, її і запишемо у вершині V_{45}, а відповідну дугу позначимо на графові подвійною стрілкою.

Переходимо до вершини 3-го рангу V_{34}. З цієї вершини в кінцеву маємо два шляхи: (V_{34}, V_{56}) та

(V_{34}, V_{45}, V_{56}). Найкоротшим є останній. Його одержуємо, додаючи дугу (V_{34}, V_{45}) до вже побудованого шляху (V_{45}, V_{56}) та відмічаючи шлях (V_{34}, V_{45}) подвійною стрілкою.

Довжина шляху (V_{34}, V_{45}, V_{56}) дорівнює 1+2=3 , записуємо це число у вершині V_{34}. Шлях (V_{34}, V_{56}) при наступних пошуках не використовуємо, тому що з вершини 3-го рангу вже знайдено найкоротший шлях до кінцевої вершини.

Переходимо до вершин 2-го рангу: V_{22}, V_{23}. Розглянемо шляхи, якими можна перейти від цих вершин до вершин вищого рангу. З вершини V_{22} до вершини вищого рангу можна потрапити лише по дузі (V_{22}, V_{34}). її відмічаємо подвійною лінією та записуємо в V_{22} число 3+3=6 - найкоротша віддаль від V_{22} до V_{56}, враховуючи, що найкоротша віддаль від V_{34} до V_{56} уже визначена.

З вершини V_{23} можна потрапити в вершини вищого рангу або по дузі (V_{23}, V_{34}), або по дузі (V_{23}, V_{45}). Обчислюємо шлях від V_{23} до V_{56} за умов руху із V_{23} по названим дугам. Шлях (V_{23}, V_{45}, V_{56}) має довжину 2+2=4 , шлях (V_{23}, V_{34}, V_{56}) 2+3=5 .

Порівнявши названі величини, приходимо до висновку, що найкоротшим шляхом від V_{23} до V_{56} буде шлях (V_{23}, V_{45}, V_{56}), отже дугу (V_{23}, V_{45}) позначаємо подвійною лінією, а в вершині V_{23} ставимо "4".

Розглянувши всі вершини 2-го рангу, переходимо до вершин 1-го рангу. У наведеному прикладі це лише V_{11} , з якої виходять дуги (V_{11}, V_{22}), (V_{11}, V_{23}) та (V_{11}, V_{45}). Розглядаємо й оцінюємо шляхи, які починаються цими дугами та закінчуються в V_{56} : (V_{11}, V_{45}, V_{56}), ($V_{45}, V_{23}, V_{45}, V_{56}$) та ($V_{11}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}$). Решту шляхів, що починаються цими дугами й закінчуються в V_{56}, не розглядаємо, бо вони мають дуги, які не позначені подвійною стрілкою (шляхи з непозначеними подвійною стрілкою дугами не можуть бути найкоротшими до кінцевої вершини).

Обчислюємо довжину кожного з трьох названих шляхів та вибираємо найкоротший: (V_{11}, V_{45}, V_{56}). Довжину цього шляху 4+2=6 записуємо в V_{11}, позначивши подвійною лінією дугу (V_{11}, V_{45}). Отже, найкоротші шляхи як від V_{11} , так і від V_{22} до V_{56} мають однакову довжину - шість одиниць.

Перейдемо до розгляду вершини V_{00}. З неї виходять дві дуги - (V_{00}, V_{11}) **та** (V_{00}, V_{22}), користуючись якими, можна дістатися до вершин вищого, ніж нульовий, рангу. З двох названих дуг меншу довжину має дуга (V_{00}, V_{22}). Тому найкоротший шлях від початкової вершини V_{00} до кінцевої V_{56} буде ($V_{00}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}$), його довжина – сім одиниць. Складові дуги шляху всі позначені подвійною лінією.

Якщо завантаження графу рис. 3.3.1 тлумачити не як відстані, а як тарифи перевезень вантажу, то ми знайшли шлях найменшої вартості перевезення з вершини V_{00} до V_{56}.

Зауваження 1. Використання описаного алгоритму дає можливість визначити найкоротший шлях та найменшу відстань від довільної вершини графу до кінцевої: найменша відстань записується в кружках, які зображають вершини, а найкоротший шлях відмічається на графові подвійною лінією.

Наприклад (рис. 3.3.1): найкоротший шлях з вершини V_{11} до V_{56} має довжину шість одиниць і проходить через вершини (V_{11}, V_{45}, V_{56}), з вершини V_{22} – теж шість одиниць і проходить через вершини ($V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}$).

Зауваження 2. Описаний алгоритм побудований на так званому "принципі оптимальності": якщо найкоротший шлях від початкової вершини до кінцевої проходить через деяку вершину $\mathbf{V_i}$, то відрізок цього шляху від вершини $\mathbf{V_i}$, до кінцевої вершини є найкоротшим серед усіх шляхів, які з'єднують вершину $\mathbf{V_i}$, та кінцеву. Так, у розглянутому прикладі найкоротший шлях від ***V_{00} до V_{56} (V_{00} ,V_{22} ,V_{34} ,V_{45} , V_{56})*** як свої складові має найкоротші шляхи до кінцевої вершини від усіх вершин, через які він проходить.

Побудова графу планування та управління мережею (ПУМ)

Розглянемо методи планування та управління при реалізації проектів створення складних систем, якими можуть бути як виробничі, так і науково-дослідні системи. Щоб скласти план виконання робіт за такими проектами, необхідно зобразити його деякою математичною моделлю, яка називається моделлю мережі і є відображенням певних послідовностей виконання робіт і взаємозв'язків між ними з урахуванням необхідних матеріальних ресурсів.

Отже, під ***моделлю мережі*** будемо розуміти план виконання комплексу взаємопов'язаних робіт, представлений у специфічній формі графу, який називається ***графіком мережі.***

Основними елементами графіка мережі є поняття події та роботи.

Термін ***робота*** використовується в системі планування та управління мереж (ПУМ) у широкому розумінні.

По-перше, це певна реальна робота, яка потребує затрат матеріальних ресурсів та відповідного терміну виконання. Кожна така робота має бути чітко визначеною, конкретною та стосуватися відповідального виконавця, без наявності якого марно говорити про планування.

По-друге, до поняття роботи відносять чекання – процес у часі, який не потребує ніяких матеріальних затрат (**наприклад**, затвердіння бетону після виконання відповідних робіт, висихання фарби тощо).

По-третє, ***фіктивна робота*** – це природний логічний взаємозв'язок між двома або кількома роботами чи їх завершенням, який не потребує затрат праці, матеріальних ресурсів або часу. Такий взаємозв'язок показує, що можливість виконання однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої. Термін виконання фіктивної роботи приймають рівним нулю.

Подія – це фіксація моменту завершення певного етапу виконання проекту. Подія може бути як результатом однієї роботи, так і підсумковим результатом декількох робіт. Подія може відбутися лише тоді, коли будуть виконані всі роботи, які передують події. Наступні роботи можуть розпочатися лише за умови, що відповідна подія відбулася. Отже, для всіх безпосередньо попередніх робіт подія фіксує момент їх закінчення, а для безпосередньо наступних – початок.

Серед подій ПУМ виділяють ***вихідну та завершальну події***.

Вихідна подія не має попередніх робіт та подій стосовно досліджуваного в моделі комплексу робіт.

Завершальна подія не може мати наступних робіт і подій.

Події, які визначають термін виконання певної роботи, назвемо ***початковою та кінцевою***.

Подію на графові ПУМ зображають кружками (вершини графу), а роботи – орієнтованими дугами, які показують, які роботи необхідно виконати, щоб відбулася певна подія, та які роботи можна виконувати, якщо подія відбувалася. Отже, будь-яка робота на графові ПУМ позначається двома подіями, між якими вона знаходиться. Подія ж може належати кільком роботам, які можна розпочинати, якщо відповідна подія відбулася. Фіктивні роботи на графові ПУМ позначаються штриховою лінією без зазначення часу. На початку, і по завершенні реальної роботи повинна бути ***лише одна подія***, бо роботи ідентифікуються за номерами подій, між якими виконуються.

Використовуються ***два принципи*** побудови графів ПУМ. При реалізації одного з них роботи зображені дугами, а вершини відповідають (співставляються) подіям, які означають завершення робіт. Це так званий граф "події – роботи". Також використовується й інший підхід до побудови графів ПУМ – без подій. За таким принципом роботи є вершинами графу, а дуги означають залежність між певними роботами в послідовності їх виконання.

Порівнюючи два принципи, можна сказати, що побудовані за другим принципом графи ПУМ, як правило, більш місткі та менш зручні для аналізу та реалізації в ЕОМ. З вищезазначених причин на практиці ширше використовується побудова графу ПУМ за принципом "події – роботи". Саме цей принцип будемо використовувати в подальшому.

Порядок та правила побудови графів ПУМ

В плані реалізації проекту і виділяються роботи, які відповідають певним етапам, складається реєстр робіт і подій, аналізується послідовність виконання робіт і взаємозв'язки між ними, за роботами закріплюються виконавці. Про визначення термінів виконання робіт буде сказано нижче. Виходячи з розподілу процесу реалізації проекту на роботи та терміни їх виконання, будують відповідний граф ПУМ. Потім виконують аналіз побудованого графу та його оптимізацію за обраними критеріями.

При побудові графу ПУМ необхідно дотримуватися певних правил, щоб у подальшому можна було досліджувати його.

Правила побудови графу ПУМ:

1. Граф ПУМ не повинен мати “глухих кутів”, тобто подій, з яких не виходить жодної роботи, окрім завершальної події. Поява “глухих кутів” подій свідчить про не досить ретельно виконаний аналіз робіт та їх взаємозв’язків.

2. На графові не може бути “хвостових” подій (окрім вихідної події), тобто подій, яким не передує жодна робота.

3. Граф не може мати замкнутих контурів і петель, тобто шляхів, які з’єднують певні події з ними ж. Поява замкнутих контурів вимагає перегляду складу робіт та їх взаємозв’язків, після змістовного аналізу яких завжди з’являється можливість уникнути замкнутих контурів і петель.

4. Дві довільні події повинні бути безпосередньо пов’язаними не більше ніж однією дугою - роботою. Ця вимога обумовлена тим, що роботи позначають двома індексами ***(i , j),*** які відповідають подіям “***i***” та “ ***j*** “ . Якщо в дійсності треба виконати кілька робіт, які розпочинаються та завершуються одночасно, при одних і тих же подіях початкових та кінцевих, то в таких випадках необхідно ввести фіктивні події та фіктивні роботи, паралельні роботи при цьому замикаються на фіктивні події.

5. На графові ПУМ повинна бути лише одна вихідна та лише одна завершальна подія. Якщо це об’єктивно не так (початок реалізації комплексу робіт можна розпочинати паралельно з декількох робіт), то необхідно ввести фіктивні події та роботи.

Управління комплексом робіт за допомогою сітьового графіка

Параметри планування й управління мережі за критерієм часу.

Подія – момент завершення певного етапу (всієї) роботи;

Одним з визначальних основних понять графу ПУМ є поняття шляху.

Шлях – це будь-яка послідовність робіт, якщо кінцева подія кожної роботи є початковою подією наступної роботи. Серед шляхів графу ПУМ виділяють підмножини завершених шляхів.

Завершений шлях – це будь-який шлях, початком якого є вихідна подія, а закінченням - завершальна.

Наприклад, маємо завантажений граф ПУМ з правильно введеною нумерацією. Термін шляху дорівнює сумі всіх термінів виконання робіт, які створюють шлях.

Завершений шлях з найбільшим терміном серед усіх завершених шляхів називається ***критичним шляхом***. Роботи, які його створюють, називаються критичними. Граф певної ПУМ може мати не один критичний шлях.

Максимальним шляхом між двома подіями "***i***" та "***j***" називають шлях від *i-ої* події до *j*-ої, який має максимальний термін, тобто сума термінів робіт, які складають такий шлях, є не меншою ніж відповідна сума для довільного шляху від ***i***-ої події до ***j***- ої .

Позначення основних параметрів планування й управління мережі

$\boldsymbol{i}$ – номер події ($\boldsymbol{i=0, 1, 2, ...m}$);

i – далі позначення події;

$\boldsymbol{j}$ – також номер події, але $\boldsymbol{i<j}$;

(i, j) – робота від події і до події $\boldsymbol{j}$;

$\boldsymbol{t(i, j)}$ – термін виконання роботи ($\boldsymbol{i, j}$);

$\boldsymbol{(0, m)}$ – повна робота, котра має різні шляхи виконання;

$\boldsymbol{t_s}$ – будь який шлях *s* виконання повної роботи;

$\boldsymbol{t_s(0, m)}$ - термін виконання повної роботи за шляхом $\mathbf{t_s}$;

$\boldsymbol{t_p}$ – найраніший момент здійснення події і;

$\mathbf{t_n}$ – найпізніший момент здійснення події і;

$\mathbf{t_{крит}}$ – критичний шлях для котрого ($\boldsymbol{t_{крит}= max\ t_s}$);

$\mathbf{R_s= t_{крит} – t_s}$– резерв шляху t_s;

Розглянемо ***формули обчислення параметрів***, зазначених вище.

$\boldsymbol{R(i) = t_n(i) - t_p(i)}$ – резерв часу події і;

$\boldsymbol{t_p(j) = \max_i[t_p(i) + t(i,j)]}$, де $\boldsymbol{i}$ – номери всіх подій, які передують події j;

$\boldsymbol{t_n(i) = \min_j[t_n(j) - t(i,j)]}$, де $\boldsymbol{j}$ – номери всіх подій, які йдуть після події і;

$\boldsymbol{R(i, j) = t_n(j)- t_p(i)- t(i, j)}$ – резерв роботи $\boldsymbol{(i, j)}$.

$K_{напр}$(i, j) коефіцієнт напруги роботи ***(i, j),*** це є показник можливості виконання роботи (i, j) за вказаний термін

$$K_{напр}(i,j)=\frac{\max t_S(i,j)-t^*(i,j)}{t_{крит}-t^*(i,j)},$$

де max ***t_s(i, j)*** – найбільший зі всіх шляхів ***t_s,*** які проходять через роботу ***(i, j);***

t^* ***(i, j)*** – спільна частина шляхів $\mathbf{t_{крит}}$ та **max $\mathbf{t_s}$(i, j);**

Маємо таку схему планування роботи від події ***i*** до події ***j*** (Рис.3.3.2).

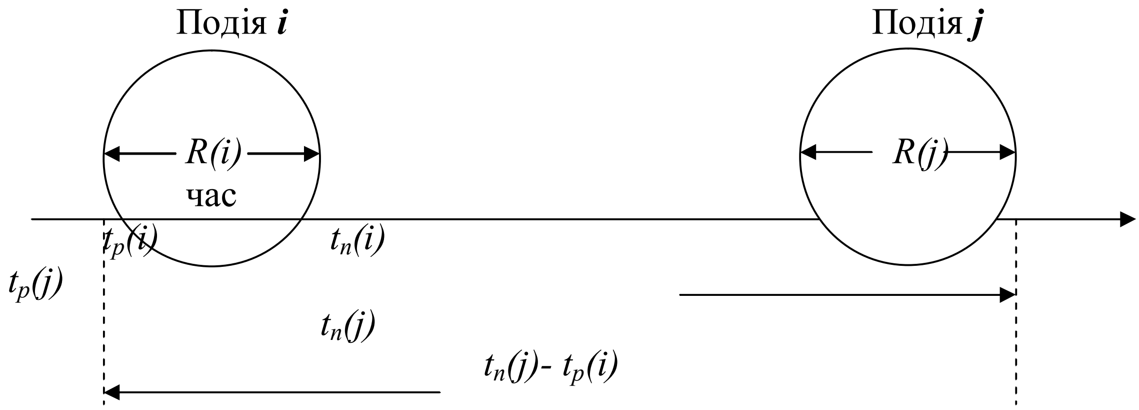


Рис.3.3.2. Схема планування роботи

Підсумовуючи викладене можна надати алгоритм оптимізації планування й управління мережі, що передують її оптимізації:

Перший етап: досліджується графу його ***топологія*** (взаємне узгодження елементів графу відповідно до вимог його побудови) та оцінюється доцільність вибору послідовності робіт і структури графу. Перевіряються доцільність виконаного рівня деталізації робіт та оцінка наявних виробничих можливостей.

Другий етап: виконується класифікація робіт і групуються роботи за величинами резервів термінів їх виконання, а також визначається ступінь (коефіцієнт) напруженості своєчасного виконання робіт некритичних шляхів. Коефіцієнт напруженості ***K(i, j)*** приймає значення від 0 до 1 . Чим більше його величина, тим важче своєчасно виконати дану роботу.

Третій етап: розрахунки запитів виробничих ресурсів та їх розподіл у часі.

Четвертий етап: визначають ймовірність своєчасного виконання планового комплексу робіт з реалізації проекту. Ці розрахунки вельми складні. Як правило, з певною мірою вірогідності вони визначають найменший та найбільший можливі терміни виконання комплексу робіт. Виділяють також роботи, які з високим рівнем надійності можуть попасти на критичний шлях. Саме цим роботам приділяється особлива увага при розподілі виробничих ресурсів і в процесі реалізації робіт.

Аналіз графу мережі дозволяє оцінити доцільність обраної структури графу, тобто класифікацію робіт та їх послідовність, завантаження виконавців робіт, можливості зміщень в часі виконання робіт некритичних шляхів. Якщо оцінки термінів виконання робіт мають ймовірний характер, то аналіз ПУМ дає можливість оцінити ймовірність виконання повного комплексу робіт з реалізації плану в заданий термін.

Питання для контролю знань

1. Що таке подія ?
2. Що називається робота?
3. Що таке шлях виконання повної роботи ?
4. Які основні риси критичного шляху ?
5. Що показує коефіцієнт напруги будь-якої роботи ?
6. Що таке резерв будь-якої події?
7. Як розуміти поняття “ резерв шляху” ?
8. Що таке резерв будь-якої роботи?
9. Що таке мережа планування роботи?
10. У чому є управління планування на мережі?
11. За якими критеріями можна оптимізувати планування на мережі?

3.4. ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ЗАМІНИ

Сутність задач заміни обладнання

Задача заміни – це прогнозування витрат, пов’язаних з відновленням устаткування, і виробленням найбільш економічної стратегії проведення цієї роботи. В дослідженні операцій виробляється ряд методів, котрі дозволяють вирішувати задачі заміни двох типів:

а) коли продуктивність устаткування падає в процесі експлуатації (внаслідок зносу) і воно застаріває морально в результаті появи нових, більш досконалих машин;

б) коли устаткування не застаріває, але в якийсь момент виходить з ладу (наприклад, електролампочки).

У першому випадку порівнюються затрати та придбання нового устаткування з витратами експлуатації діючого і знаходиться оптимальний момент заміни. Для вирішення деяких з цих задач використовуються методи динамічного програмування.

У другому випадку визначають, які саме одиниці потрібно заміняти та як часто проводити заміну, щоб мінімізувати загальні затрати, пов'язані як з покупкою нового устаткування , так і зі збитком, котрий наносить несправне устаткування до його заміни. В цих задачах широко використовуються фізико-статистичні методи оскільки вихід із ладу устаткування завжди має нерегулярний, вірогідний характер.

Обладнання, яке знаходиться в експлуатації або простоює, з часом втрачає свої первинні властивості, а тому для підтримки його в стані «не гірше, ніж нове» необхідно збільшувати витрати на експлуатацію. Для розв'язування задача, які пов'язані з контролем за станом обладнання, можуть використовуватися як детермінований, так і стохастичний підхід.

На вибір підходу впливає наявність або відсутність у формуванні задачі невизначеностей відносно термінів і послідовності прийняття рішень. Вибір моделі залежить також від кінцевої мети, яка повинна бути досягнута, наприклад:

- розробити стратегію ремонту устаткування, в результаті якої максимізується коефіцієнт готовності обладнання (ця постановка особливо актуальна для обладнання екстремального використання);
- розробити стратегії використання і модернізації обладнання, при яких, мінімізуються сумарні витрати на утримання обладнання (ця постановка актуальна для устаткування довгострокового використання).

Класифікація задач заміни обладнання

На рис.3.4.1 приведена схема класифікації задач технічного обслуговування устаткування.

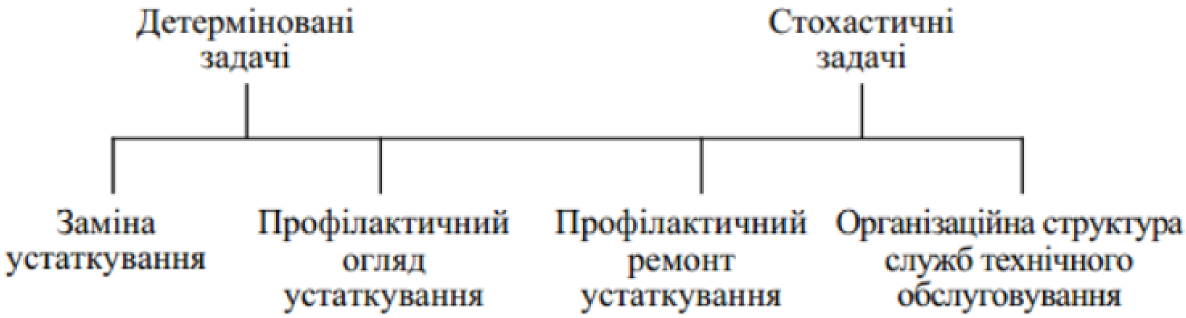


Рис. 3.4.1. Схема класифікації задач технічного обслуговування

У задачах лінійного та нелінійного програмування розглядаються статичні процеси, і оптимальний розв'язок знаходиться лише на один етап планування, одномоментно. Такі задачі називаються ***одно-кроковими.***

В задачах динамічного програмування процес залежить від часу, і тому розв'язування зводиться до багатоетапного або багатостадійного процесу прийняття рішень.

Розв'язання задач динамічного програмування дозволяє виробити оптимальну стратегію дій, в той час як статичні задачі дозволяють отримати розв'язок, оптимальний з точки зору умов, що склалися, тобто тактичний. Однак ця межа не є чітко визначеного, тому що широкі класи динамічних задач в принципі можна звести до однокрокових, але цей факт має скоріше теоретичний інтерес, тому що розв'язати такі зведені задачі внаслідок надзвичайно великого зростання розмірності просто неможливо. З іншого боку, деякі статичні задачі можна представити у вигляді багатокрокових і розв'язувати методом динамічного програмування.

Таким чином, динамічне програмування (ДП) є математичним апаратом, що дозволяє здійснити оптимальне планування ***багатокрокових*** керованих процесів та процесів, які залежать від часу.

Процес називається керованим, якщо наявна можливість виливу на перебіг його розвитку.

Керуванням називатимемо сукупність розв'язків, що приймаються на кожному з етапів з метою впливу на хід процесу.

Випуск продукції підприємством – це керований процес, що визначається змінами попиту ринку, складу обладнання, величиною попереднього прибутку, тенденціями розвитку, відсотком коштів, що спрямовуються у виробництво та наукову діяльність і ін. Сукупність рішень, що приймаються на початку кожного з відрізків певного періоду (тижнів місяця, місяців року та ін.) з питань забезпечення сировиною, обладнанням, розмірами фінансування, є керуванням. Планування на місяць здійснюється з врахуванням того, що на кінець року повинні бути досягнуті певні цілі.

Багатоетапні керовані процеси мають наступні спільні риси:

1. Процес може бути підданий декомпозиції, тобто розбитий на складові елементи - кроки або етапи. Якщо процес розглядається в часі, то природним є розбиття за періодами часу. Виробничі процеси можуть бути розбиті за стадіями відповідно до їх технологічних особливостей, ресурси можуть бути розподілені між споживачами і т. ін.

2. Кожний етап характеризується станом, який визначається значеннями факторів, або змінних, кількість яких для кожного з етапів може бути різною.

3. З загального числа змінних виділяються керовані, тобто ті, значення яких можна спрямовано змінювати і цими змінами впливати на стан процесу, та змінні стану.

4. На кожному кроці існує залежність між керованими змінними, змінними стану та функцією мети, яка представляється за допомогою рівняння, системи рівнянь або таблично. За допомогою динамічного програмування для кожного кроку встановлюються такі значення керованих змінних, які забезпечують екстремальне значення функції мети для процесу загалом.

5. Критерій оптимальності повинен бути адитивним, тобто значення функції мети для всього керованого процесу повинно складатися з елементарних значень цієї функції, отриманих для кожного окремого етапу.

Таким чином, за допомогою методу динамічного програмування здійснюється оптимізація багатоетапних процесів, виходячи з інтересів системи загалом, а не кожної її стадії як окремого елементу, тому розв’язок на кожному кроці повинен відповідати вимогам оптимізації процесу загалам.

Задача про заміну обладнання

Під обладнанням будемо розуміти верстати, агрегати, машини тощо. В процесі експлуатації обладнання відбувається фізичне та моральне його зношування, тобто старіння. Внаслідок старіння обладнання знижується його продуктивність, збільшуються витрати на ремонт та обслуговування, знижується його вартість.

Тому настає час, коли вигідніше замінити старе обладнання на нове. У зв'язку з цим виникає задача визначення оптимального терміну заміни старого обладнання новим, який може визначатись, наприклад, максимальним прибутком від експлуатації обладнання.

Введемо позначення:

r (t) – вартість продукції, яка виробляється за один рік на обладнанні віком ґ років;

u (t) – річні витрати на обслуговування обладнання віком ґ років;

s (t) – залишкова вартість обладнання віком t років;

p – вартість нового обладнання.

Покажемо, як визначити оптимальні терміни заміни обладнання в період часу тривалістю п років. При цьому процес розв'язування задачі розіб'ємо на n кроків. За критерій оптимальності на ***i*** -му кроці (***i = 1, 2, ... , n)*** приймемо умовний прибуток, який одержується від експлуатації обладнання (старого або заміненого новим на певному кроці) за роки від ***i*** -го до ***n*** -го. Зауважимо, що під умовним прибутком на окремому ***i*** -му кроці розуміємо різницю між вартістю виробленої продукції та експлуатаційними витратами за ***i*** -тий рік. Крім того, вважатимемо, що на ***i*** -му кроці термін експлуатації обладнання приймається той, який є на початку ***i*** -го року.

Варіантом розв'язку на ***i*** -му кроці (тобто для ***i*** -го року) є одна з альтернатив: продовжувати експлуатацію обладнання або замінити обладнання на нове на початку ***i*** -го року. При цьому вважатимемо, що заміна старого обладнання на нове відбувається миттєво.

Запишемо основне функціональне рівняння. Для цього позначимо через fi (t) максимальний умовний прибуток, який отримується за роки від ***i*** -го до ***n*** -го при умові, що на початку ***i*** -го року маємо обладнання віком **t** років. Окремо рівняння запишемо для ***t > 0 i t = 0.*** Тоді матимемо наступні рекурентні співвідношення:

$$f_i(t) = \max\{r(t) - u(t) + f_{i+1}(\tilde{t})\},$$

якщо експлуатувати старе обладнання,

$$f_i(0) = \max\{r(0) - u(0) + s(t) - \rho + f_{i+1}(1)\}$$

якщо на початку ***i*** **-**го року замінити обладнання, де ***r(t) - u(t)*** - різниця між вартістю виробленої продукції ***nf*** експлуатаційними витратами за ***i*** -й рік при експлуатації старого обладнання; f_{i+1} ***(t)*** - сумарний умовний прибуток від експлуатації обладнання впродовж кроків, що залишились, тобто від $(i+1)$-го до n-го, де:

$$f_{t+1}(\widetilde{t})=\begin{cases} f_{i+1}(t+1), \textit{ за експлуатації на } (i+1)-\textit{му кроці старого обладнання} \\ f_{i+1}(0), \textit{ за експлуатації на } (i-1)-\textit{му кроці старого обладнання} \end{cases}$$

$r(0)\ -\ u(0)$ - різниця між вартістю виробленої продукції і експлуатаційними витратами за i -й рік при експлуатації нового обладнання.

У випадку $i=n$ рекурентні співвідношення приймуть вигляд:

$f_n(t)=\max\{r(t)-u(t)+s(t+1)\}$, якщо експлуатувати старе обладнання,

$f_n(0)=\max\{r(0)-u(0)-\rho+s(1)\}$, якщо замінити обладнання.

Рекурентні рівняння дають можливість не тільки визначити, яке рішення приймати на кожному кроці, а й визначити умовний прибуток, який отримується при прийнятті кожного рішення.

Приклад. Фірма планує визначити оптимальну політику заміни наявного на даний час обладнання, якому три роки, впродовж чотирьох наступних років (n = 4), тобто до початку п'ятого року. Вхідні дані подані в таблиці 3.4.1.

Таблиця 3.4.1

Вхідні дані для прикладу 1

Роки *(t)*	*r(t)* (тис. у.од.)	*u(t)* (тис. у.од.)	*s(t)* (тис. у.од.)
0	20,0	0,2	-
1	19,0	0,6	80
2	18,5	1,2	60
3	17,2	1,5	50
4	15,5	1,7	30
5	14,0	1,8	10
6	12,2	2,2	5

Фірма також вимагає заміни обладнання, яке знаходиться в експлуатації шість років. Вартість нового обладнання становить 100 тис. у. о.

Розв'язання. На початку першого року маємо обладнання трирічного віку. Тому ми можемо його впродовж першого року експлуатувати або замінити новим. Якщо обладнання на початку першого року замінили, то на початку другого року його вік становитиме один рік, у протилежному випадку вік обладнання становитиме чотири роки. Такий же підхід використовується на початку кожного року, починаючи з другого по четвертий.

Отже, на початку другого року можливе тільки обладнання з терміном експлуатації один або чотири роки. На початок третього року обладнання може мати вік один, два або п'ять років. І, нарешті, на початок четвертого року вік обладнання може становити 1, 2, 3 або 6 років.

Почнемо знаходити умовно оптимальні рішення на кожному кроці, починаючи з четвертого. При цьому використаємо позначення: ***E*** - старе обладнання експлуатується, ***З*** - старе обладнання замінюється на нове. Результати розв'язування помістимо в таблиці 3.4.2-3.4.5.

Таблиця 3.4.2

Результати розв'язування прикладу 1. Крок 4

t	**Е**	**З**	**Оптимум**	
	$r(t)-u(t)+s(t+1)$	$r(0)-u(0)+s(t)-\rho+s(1)$	$f_4(t)$	**Рішення**
1	19,0-0,6+6=78,4	20-0б25+80-100+80=79,8	79,8	З
2	18,5-1,2+50=67,3	20-0б2+60-100+80=59,8	67,3	Е
3	17,2-1,5+30=45,7	20+0,2+50-100+80=49,8	49,8	З
6	Необхідна заміна	20-0,2+5-100+8=4,8	4,8	З

Таблиця 3.4.3

Результати розв'язування прикладу 1. Крок 3

t	**Е**	**З**	**Оптимум**	
	$r(t)-u(t)+s(t+1)$	$r(0)-u(0)+s(t)-\rho+s(1)+f_4(1)$	$f_з(t)$	**Рішення**
1	19,0-0,6+67,3=87,5	20-0,2+80-100+79,8=79,6	85,7	Е
2	18,5-1,2+49,8=67,1	20-0,2+60-100+79,8=59,9	67,1	Е
5	14,0-1,8+4,80=17,0	20+0,2+10-100+79,8=9,6	17,0	Е

Таблиця 3.4.4

Результати розв'язування прикладу 1. Крок 2

t	Е	З	**Оптимум**	
	$r(t)-u(t)+f_з(t+1)$	$r(0)-u(0)+s(t)-\rho+s(1)+f_з(1)$	$f_2(t)$	**Рішення**
1	19,0-0,6+67,1=85,5	20-0,2+80-100+85,7=85,5	85,5	Еабо З
4	15,5-1,7+17,0=30,8	20-0,2+30-100+85,7=35,5	35,5	З

Таблиця 3.4.5

Результати розв'язування прикладу. Крок 1

t	Е	З	Оптимум	
	$r(t)-u(t)+s(t+1)$	$r(0)-u(0)+s(t)-\rho+s(1)+f_4(1)$	$f_1(t)$	Рішення
3	17,2-1,5+35,5=51,2	20-0,2+50-100+85,5=55,3	55,3	З

Послідовність отримання оптимального розв'язку є такою. На початку першого року оптимальним розв'язком при t = 3 є заміна обладнання (табл.3.4.5).

Отже, на початок другого року обладнання матиме вік один рік.

При t = *1* на початку другого року оптимальним розв'язком буде або експлуатація обладнання, або його заміна (табл.3.4.4). Якщо на початок другого року прийняти рішення продовжити експлуатувати обладнання, то на початок третього року воно матиме вік два роки.

При **t** = 2 на початку третього року оптимальним розв'язком буде експлуатація обладнання (табл.3.4.3). Тому на початок четвертого року обладнання матиме вік три роки.

При **t** = 3 на початку четвертого року оптимальним розв'язком буде заміна обладнання (табл.3.4.2). Отже, в цьому випадку, починаючи з першого року, оптимальною стратегією є: З, Е, Е, З.

Якщо на початок другого року прийняти рішення замінити обладнання, то на початок третього року обладнання матиме вік один рік.

При **t** = 1 на початку третього року оптимальним розв'язком буде експлуатація обладнання (табл.3.4.3.). Тому на початок четвертого року обладнання матиме вік два роки.

При **t** = 2 на початку четвертого року оптимальним розв'язком буде експлуатація обладнання (табл.3.4.2).

Отже, тепер, починаючи з першого року, альтернативною оптимальною стратегією є: З, З, Е, Е.

Питання для контролю знань

1. У чому полягає задача заміни обладнання?
2. Класифікація задач.
3. Сформулювати задачі максимізації та мінімізації
4. Основна характеристика устаткування.
5. Що можна зробити із застарілим обладнанням?

3.5. ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ

Характеристика задач стохастичного програмування

В аналітичній діяльності, на практиці часто зустрічаються оптимізаційні задачі, параметри яких мають випадковий характер. Задачі такого типу розв'язуються методами стохастичного програмування. В таких задачах випадковими можуть бути елементи матриці планування в транспортній задачі, об'єми потреб (праві частини обмежень), ціни та інші фактори.

Їх випадковий характер пов'язаний з тим, особливо в задачах динамічного програмування, що не можливо при плануванні на тривалий період вказати значення всіх коефіцієнтів і нормативів з повною визначеністю. Вони можуть завжди змінюватися або з причини деяких не передбачуваних подій, або просто під впливом часу, причому на невідому величину.

Наприклад, у разі планування діяльності сільськогосподарських підприємств є можливість точно передбачати площі посівів сільськогосподарських культур, рівні внесення добрив, поголів'я тварин (керовані змінні), але кінцевий результат діяльності у значній мірі залежить також від погодних умов, податкової та кредитної політики тощо (некеровані змінні).

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку – випадкові величини, є ***предметом стохастичного програмування.***

В чому ж основні труднощі розв'язання задач стохастичного програмування? По-перше, далеко не завжди можна правильно сформулювати задачу, тобто досягти того, щоб ймовірнісна модель добре описувала процес, що вивчається. По-друге, коли така модель побудована, треба розробити або правильно вибрати серед відомих метод її розв'язання. Все це привело до того, що стохастичне програмування є найменше розробленим серед методів розв'язання задач математичного програмування.

Розглянемо застосування методів стохастичного програмування на прикладі роботи авторемонтного підприємства. На підприємство протягом року поступають замовлення на виконання тих або інших робіт. Заздалегідь невідомо коли, які і в якій кількості надійдуть замовлення. Здоровий глузд підказує, якщо набір верстатів на підприємстві малий, то воно зможе виконувати тільки обмежене коло робіт і буде виконувати їх повільно.

Внаслідок цього, замовники віддадуть перевагу іншим, більш сучасним підприємствам, а дане підприємство буде терпіти збитки. Ці збитки вимірюються величиною прибутку, не одержаного внаслідок слабкості матеріальної бази. В той же час зрозуміло, якщо набір верстатів різноманітний і велика їх кількість, то протягом тривалого часу деякі верстати будуть простоювати бездіяльними. Отже, витрати на їх купівлю окупляться не скоро.

Очевидно існує якесь проміжне рішення цієї проблеми. Воно, правда, не може трактуватись як вимога досягнення максимуму прибутку, оскільки прибуток за рік є випадковою величиною. В таких випадках за цільову функцію береться або математичне сподівання прибутку, яке обчислюється при відомій функції розподілу замовлень, або ймовірність того, що об’єм прибутку буде не меншим заданого.

Доведено , що розв’язок проблеми в першому разі за 95 умови лінійності обмежень зводиться до звичайної задачі лінійного програмування, в другому разі задача вимагає спеціальних методів дослідження

Можливі дві постановки задачі стохастичного програмування і можливі методи їх розв’язання.

Характеристика задач теорії ігор

Основні поняття теорії ігор. Теорія гри та прийняття управлінських рішень

Теорія ігор – це розділ дослідження операцій, що займається теорією математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. При цьому математичні моделі, що застосовуються, є достатньо спрощеними та ідеалізованими схемами реальних явищ.

Таким чином, теорія ігор досліджує питання поведінки і виробляє оптимальні правила (стратегії) поведінки для кожного з учасників конфліктної ситуації.

Розв’язання суперечностей за допомогою теорії ігор можливе лише після проведення математичного моделювання ситуацій у вигляді гри.

Справжній інтерес до теорії ігор пробудила робота фон Ноймана і Моргенштерна “Теорія ігор та економічна поведінка”, що вийшла в світ у 1944 році.

Наступному швидкому розвитку теорії ігор значною мірою сприяла Друга світова війна. Під час війни було розгорнуто широку діяльність у напрямку наукового чи, щонайменше, систематичного підходу до таких задач, які раніше знаходилися виключно в компетенції "практиків". Маються на увазі такі питання, як: організація тилу, пошук підводних човнів, протиповітряна оборона та ін. Теорія ігор є одним із найскладніших теоретичних обгрунтувань з тих, що з'явилися у цій галузі. Своїм подальшим розвитком теорія ігор завдячує таким відомим вченим, як Р. Данкан Льюс, Ховард Райфа, Ерве Мулен, Н. Н. Воробйов та ін.

Слід зазначити, що теорія ігор є, насамперед, математичною дисципліною. В основному це пояснюється тим, що початок їй поклав математик і викладена вона була як достатньо формальна побудова, що зробило її доступною в якості знаряддя дослідження лише для математиків.

Тим не менше, в наш час теорія ігор застосовується в найрізноманітніших галузях науки і суспільного життя, її результатами користуються політики, економісти, військові, букмекери.

Одна з характерних рис будь-якого суспільного, соціально-економічного явища полягає у множинності, різнобічності інтересів, в наявності сторін, що мають відмінні інтереси та нетотожні цілі, або хоча б у наявності кількох різних активних точок зору стосовно явища та його результату.

У цьому сенсі можна сказати, що будь-якому соціально-економічному явищу властиві риси конфлікту. Також слід зауважити, що кожна зацікавлена сторона повинна мати різні можливості діяти, задовольняти свої інтереси (вперше це твердження було сформульоване Вільямом Ешбі і отримало назву "закону про необхідну різноманітність").

В іншому випадку, коли сторона має лише одну таку можливість, вона перестає відігравати роль сторони у процесі, що розглядається, і перетворюється на обставину, яка однозначно впливає на цей процес.

Отже, адекватна математична модель соціально-економічного явища повинна відображати властиві йому риси конфлікту: відмінність інтересів сторін - учасників конфлікту, а також різноманітність відповідних дій, які ці сторони можуть здійснювати для досягнення своїх цілей.

Це означає, що соціально-економічне явище при його математичному моделюванні повинно поряд з іншими можливими представленнями припускати ще й представлення у вигляді конфлікту, тобто таке, в якому відображені наступні його компоненти: зацікавлені сторони; можливі дії кожної зі сторін; інтереси сторін.

Ситуація називається конфліктною, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні.

Завдання дослідника конфліктної ситуації полягає в приведенні її з мінімальними втратами до формальної гри.

Основними принципами, що використовуються при пошуку розв'язків ігор, є принципи оптимальності та рівноваги.

Оптимальність. Дослідження конфліктів, а у відповідності до цього - ігор, можна проводити з різних точок зору:

- дескриптивної, яка полягає у визначенні того, які ситуації фактично складаються (або можуть складатися) в тих чи інших конфліктах;
- нормативної, що визначає, яку поведінку гравців слід вважати оптимальною (розумною, адекватною);
- конструктивної, яка вказує, як реалізовувати потрібні (наприклад, оптимальні) стратегії або ситуації;
- прогностичної, що займається передбаченням фактичного результату конфлікту.

Теорія ігор як математична дисципліна в її сучасному стані займається нормативним вивченням ігор.

Основними задачами теорії ігор можна вважати наступні:

- синтез принципів оптимальності:
- встановлення можливостей реалізації принципів оптимальності (тобто встановлення факту існування оптимальних у цьому сенсі ситуацій);
- знаходження їх реалізацій.

Основними змістовними рисами конфлікту стосовно результатів або множини результатів конфлікту вважаються інтуїтивні уявлення про ***вигідність, стійкість та справедливість***.

Рівновага. Однією з плідних форм реалізації уявлень про оптимальність можна вважати ***поняття рівноваги*** , яке полягає в наступному. Ситуація називається *рівноважною* , якщо жоден з гравців не зацікавлений у відхиленні від неї. Формально це записується наступним чином. Нехай

$\Gamma = \left\langle \boldsymbol{I}, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \right\rangle$ – безкоаліційна гра,

а $\boldsymbol{x = (x_1, ..., x_n)}$ - деяка ситуація в ній.

Якщо $\boldsymbol{x_i'}$ - довільна стратегія гравця $\boldsymbol{i}$, то введемо наступне позначення $x \| x_i' = \left(x_1, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_n\right)$.

Таким чином, $x \| x_i'$ є результатом заміни в ситуації x стратегії $\mathbf{x_i}$ гравця i на його стратегію $\boldsymbol{x_i'}$. Ситуація $\boldsymbol{x^*}$ називається рівноважною (або ***ситуацією рівноваги)***, якщо

$$\forall i \in I \wedge x_{i \in X_i}: \quad H_i\left(x^* \| x_i\right) \leq H_i\left(x^*\right) \quad .$$

Класифікація ігор реалізується за певною множиною класифікаційних ознак, а саме: кількість гравців, кількість стратегій, характер взаємин між гравцями, характер виграшів, вигляд функції виграшів, момент вибору ходу, кількість ходів, стан інформації.

Предметом теорії ігор є дослідження конфліктних ситуацій методом математики. Однією з характерних і суттєвих рис громадського, соціально-економічного процесу є розмаїття та різноплановість інтересів і наявність сторін, які є носіями таких інтересів.

Класичними прикладами є ринкові відносини: продавець-покупець; кілька виробників товару, які можуть об’єднуватися та встановлювати ціну товару; кілька конкуруючих між собою виробників. Складніші конфліктні ситуації обумовлені наявністю об’єднань та груп, інтереси яких не співпадають: визначення рівня заробітної плати об’єднанням профспілок і підприємців та ін.

Конфлікт може виникнути також через розбіжності цілей, які віддзеркалюють не лише несполучні інтереси різних осіб або сторін, а також різноманітні інтереси однієї і тієї ж особи.

Наприклад, планування економічної політики на певний період вимагає узгодження протилежних і несполучних вимог: зростання обсягів виробництва, збільшення прибутків, покращання екології і т. ін.

Протидія зацікавленій стороні може бути не лише наслідком усвідомлених дій, а також і результатом об’єктивно існуючих, але непередбачених в повному обсязі умов, *наприклад*, цілеспрямованих дій по одержанню високого врожаю, природних умов, які не завжди цьому сприяють. Багато таких ситуацій можна зустріти в різних сферах діяльності: економіці, господарюванні, біології, соціології, військовій справі і т. ін. Моделювання таких ситуацій прийнято називати “гра з природою”. Характерною особливістю відповідних моделей є розробка математичного апарата з прийняття рішень в умовах так званої природної невизначеності.

Будь-яка математична модель перебігу економічного, соціального та інших процесів має адекватно віддзеркалювати притаманні їм особливості конфлікту та методи його вирішення:

а) перелік зацікавлених сторін, які будемо називати гравцями; в літературі з теорії гри користуються й іншими назвами: сторони, учасники і т. ін.;

б) перелік можливих дій усіх учасників гри в залежності від ситуації; кожна можлива дія називається ходом або стратегією;

в) інтереси сторін, представлені певною мірою; залежності таких інтересів від ситуації описуються так званими функціями виграшу.

Віддзеркалення змісту конфлікту в аналітичних залежностях створює математичну модель, яку називають грою.

У моделях теорії гри прийняття управлінських рішень пов'язане з розв'язанням задач, які умовно можна розділити на класи:

1) прийняття рішень за умов однозначності вихідних даних і перебігу керованого процесу в майбутньому; це так звані детерміновані задачі;

2) прийняття рішень за умов неоднозначності як вихідних даних, так і перебігу процесу в майбутньому, коли умови можна оцінити лише з певною мірою ймовірності; це стохастичні задачі управління;

3) прийняття певних рішень за умов невизначеності.

Математичні моделі обгрунтування рішень у задачах першого класу досить широко та змістовно розроблені з використанням певних методів оптимізації: лінійного та нелінійного математичного програмування, теорії управління процесами, перебіг яких моделюється диференціальними та інтегральними рівняннями, динамічного програмування.

Стохастичні моделі управління використовуються за умов, коли відомі можливі стратегії досягнення мети та ймовірні наслідки використання певної стратегії, але модельовані процеси такі, що не можна гарантувати однозначності їх перебігу. Для пошуку стратегій, оптимальних за обраним критерієм якості, використовуються методи, які в цілому можна характеризувати як "оптимізацію в середньому": оцінюється математичне сподівання показника ефективності кожної з можливих стратегій. Такий підхід дозволяє стохастичну задачу обгрунтування управлінського рішення звести до певної детермінованої задачі.

У ***моделях третього класу*** (прийняття певних рішень за умов невизначеності) досліджується розв'язання задач, для яких характерно те, що про умови перебігу досліджуваного процесу принципово не можна мати певної інформації ні детермінованої, ні стохастичної.

Обґрунтування рішень в умовах невизначеності

Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності близькі за ідеями та методами до теорії ігор, основною відмінністю є відсутність конфліктного забарвлення – ніхто нікому не протидіє, але наявний елемент невизначеності.

Прийняття рішень є важливою частиною будь-якої управлінської діяльності. В управлінні організацією прийняття рішень здійснюється менеджерами різних рівнів і носить більш формалізований характер, ніж це має місце бути в приватному житті. Справа в тому, що тут рішення торкається не тільки однієї особистості, частіше за все воно відноситься до частини або до цілої організації, і тому підвищується відповідальність за прийняття організаційних рішень.

У зв'язку з цим виділяють два рівні рішень в організації: індивідуальний і організаційний. Якщо у першому разі управлінця більше цікавить сам процес, його внутрішня логіка, то у другому - інтерес зсувається в сторону створення відповідного середовища навколо цього процесу. Ухвалення рішень - це основа діяльності організації. Від якості розробки, прийняття та впровадження управлінських рішень залежить ефективність використання людських, матеріальних, фінансових, енергетичних та інформаційних ресурсів конкретної організації.

За результатами рішень відбувається процес порівняння, аналізу та оцінки запланованих показників і досягнутих результатів. Ухвалення та виконання управлінських рішень - найголовніший оціночний критерій керівних здібностей. Адже від оцінки рішень та процесу їх ухвалення, форм впровадження, виконання залежать продуктивність праці, економне та раціональне використання спожитих ресурсів, рівень інформаційної системи, мотивація персоналу та багато інших аспектів управління.

При прийнятті управлінських рішень завжди важливо враховувати ризик. Поняття «ризик» використовується тут не в значенні небезпеки. Ризик скоріше відноситься до рівня визначеності, з якої можна прогнозувати результат. В ході оцінки альтернатив і прийняття рішень керівник повинен прогнозувати можливі результати в різних обставинах або станах природи. Взагалі, рішення приймаються за різних обставин по відношенню до ризику. Ці обставини традиційно класифікуються як умови визначеності, ризику або невизначеності.

Рішення приймаються в умовах невизначеності, коли неможливо оцінити імовірність потенційних результатів, оскільки необхідні чинники є складними і новими, і про них неможливо отримати достатньо релевантну інформацію. Стикаючись з невизначеністю, керівник може використовувати різні можливості:

а) спробувати отримати додаткову релевантну інформацію і на її основі ще раз проаналізувати проблему;

б) діяти у відповідності з минулим досвідом, інтуїцією і зробити припущення про імовірність подій.

В умовах невизначеності ситуації корисно розраховувати: очікуване значення; середнє квадратичне відхилення; коефіцієнт варіації.

Для обґрунтування рішень в умовах невизначеності використовують: методи теорії статистичних рішень (ігри з природою) та методи теорії ігор.

Методи теорії статистичних рішень використовуються, коли невизначеність ситуації обумовлена об'єктивними обставинами, які невідомі або носять випадковий характер.

У задачах теорії статистичних рішень вже існує оцінка реалізації кожної стратегії для кожного стану природи. Проте зовсім невідомо, який із станів природи реально виникатиме. Покажемо на уявному прикладі методи обґрунтування рішень.

Розглянемо методи прийняття рішень згідно матриці післядій або результатів.

Розглянемо будь яку діяльність людини (виробничу, наукову, життєву).

B* = *{bij} – матриця оцінок кінцевих результатів будь-якої діяльності. Будемо звати її матрицею післядій або результатів

j / i	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n
S_1	b_{11}	b_{12}	…	b_{1j}	…	b_{1n}
S_2	b_{21}	b_{22}	…	b_{2j}	…	b_{2n}
…	…	…	…	,,,	…	…
S_i	b_{i1}	b_{i2}	…	b_{ij}	…	b_{in}
…	…	…	…	…	…	…
S_m	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{mj}	…	b_{mn}

Вводимо позначення:

m – кількість можливих стратегій (рішень) для досягнення мети;

S_i* *(i = 1, 2, ..., m) – будь яка стратегія;

n – кількість можливих умов (ситуацій) діяльності;

A_j* *(j = 1, 2, ..., n) – будь яка ситуація, причому невідомо, яка саме ситуація відбудеться, тобто стосовно умов, в яких розгортатиметься діяльність, є невизначеність;

b_{ij} – оцінка кінцевого результату діяльності, якщо буде реалізована умова ***j*** та обране рішення ***i***.

Мета діяльності (максимум прибутку, максимум врожайності, мінімум витрат, мінімум ризику, максимум комфорту, мінімум часу та ін.).

Для розв'язання таких задач використовуються наступні критерії (методи):

1. ***Критерій песимізму*** (критерій Уолда). Згідно критерію песимізму для кожної стратегії існує найгірший з можливих результатів. Вибирається при цьому така стратегія, яка забезпечує найкращий з найгірших результатів, тобто забезпечує максимальний з можливих мінімальних результатів. Критерій песимізму у математично формалізованому виді можна представити так: ***max (min b(ij)).***

Повертаючись до нашого прикладу, розглянемо матрицю результатів ***B***, припустимо, що ми не маємо ніяких міркувань щодо реалізації варіанту умов A_j. Тоді ми обираємо результат при найгірших умовах для кожної стратегії ***i*** (в кожному рядку матриці ***B)***

$$b_i^* = \min_j b(ij,).$$

Далі треба взяти із всіх b_i^* для всіх стратегій (i = 1, 2, ..., m) найкращий

$$b^{**} = \max_i b_i^*.$$

Рекомендація така: орієнтуватися на стратегію, для якої буде b^{**}.

2. ***Метод максимізації середнього результату***.

Розглянемо матрицю результатів ***B.***

Припустимо, що маємо ймовірності реалізації ситуацій (умов) A_j: $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Тоді для кожної стратегії ***i*** обчислюємо середнє значення оцінки b_{ij} з урахуванням ймовірностей реалізації умов:

$$\bar{b} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} * p_j .$$

Рекомендація така: треба прийняти рішення, яке має найбільший середній результат: $b^{**} = \max_i \bar{b}_i$.

3. ***Метод прийняття рішення (стратегії) з аналізу кожної стратегії***

Припустимо, що маємо матрицю результатів ***B*** та ймовірності реалізації умов A_j для кожної можливої стратегії ***i***.

Візьмемо першу стратегію (i =1) та розглянемо розподіл ймовірностей результатів:

B	b_{11}	b_{12}	…	b_{1n}
P	p_1	p_2	…	p_n

Маємо дискретну випадкову величину ***B***. Обчислюємо середнє значення результату(математичне сподівання) та середнє квадратичне відхилення за формулами:

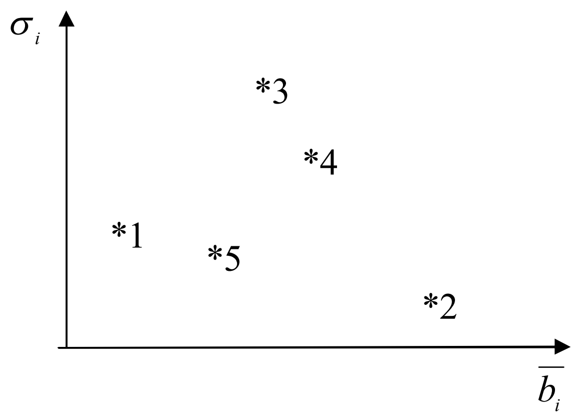
$$\bar{b}_1 = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} * p_j; \quad \sigma_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_{1j}^2 * p_j - \left(\bar{b}_1\right)^2}.$$

і т.д.

Для всіх стратегій ми маємо тепер значення $\bar{b}_i$ та σ_i. Для кожної стратегії i число σ_i показує міру відхилення значень результатів b_{ij} навколо середнього значення $\bar{b}_i$. Отже, чим більше число σ для стратегії, тим більша можливість мати велику різницю між середнім та фактичними значеннями результату, якщо ми приймаємо цю стратегію.

У цьому розумінні число σ може бути показником ризику, тобто $\sigma_i = r_i$, для кожної стратегії. Таким чином, треба обирати таку стратегію діяльності, яка водночас має максимальне $\bar{b}$ та мінімальне σ. Якщо за таких умов не можна однозначно обрати стратегію, тоді висновок, щодо вибору стратегії бажано робити на підставі професійного розуміння проблеми: віддати перевагу максимальному прибутку $\bar{b}$ або мінімальному ризику σ.

Побудуємо графік (припустимо, що може бути 5 стратегій, ***m***=5). Він може бути такий:



Рекомендація така: прийняти стратегію 2.

Розглянемо методи прийняття рішень згідно матриці ризиків. Припустимо, що ми бажаємо оцінити ризик, якщо ми обиратимемо стратегію ***i*** але реальна ситуація, яка відбудеться невідома.

Тоді для кожної умови (ситуації), треба взяти максимальне значення $\boldsymbol{b_j}=\max\limits_{i} \boldsymbol{b_{ij}}$ результату.

Потім знайдемо ризик $\boldsymbol{r_{ij} = b_j - b_{ij}}$, як різницю між максимальним значенням результату b кожної ситуації ***j*** та можливим значенням $\boldsymbol{b_{ij}}$***,*** якщо ми обиратимемо стратегію ***i***.

Ми розуміємо ризик як потенційні збитки, якщо ми обираємо стратегію ***i***, однак це не є рішення, яке надає максимуму прибутку за умовою ***j***. Можна побудувати матрицю ризиків $\boldsymbol{R = \{r_{ij}\}}$

i \ j	A_1	A_2	…	A_n
S_1	r_{11}	r_{12}	…	r_{1n}
S_2	r_{21}	r_{22}	…	r_{2n}
…	…	…	…	…
S_m	r_{m1}	r_{m2}	…	r_{mn}

Задача полягає в тому, щоб визначити, яке рішення, тобто стратегію, треба прийняти згідно з метою задачі.

4. ***Метод Севіджа (правило мінімального ризику)***

Розглянемо матрицю ризиків **R**. Будемо орієнтуватися на найгіршу ситуацію з максимальним ризиком і для кожної стратегії (в кожному рядку) візьмемо максимальне значення $\boldsymbol{r_{ij}}$:

$$\boldsymbol{r_i^* = \max_{j} r_{ij}},$$

а далі обираємо рішення (рядок) з найменшим значенням $\boldsymbol{r_i^*}$ **:**

$$\boldsymbol{r^{**} = \min_{i} r_i^*}.$$

Рекомендація така: слід прийняти стратегію, для якої буде $\mathbf{r^{**}}$**.**

5. ***Метод мінімізації середнього ризику***

Припустимо, що ймовірності всіх можливих умов (ситуацій) відомі: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тоді для кожної стратегії обчислюємо середній ризик (по кожному рядку матриці R):

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} * p_j \,.$$

Рекомендація така: обираємо стратегію з найменшим значенням $\bar{r}_i$

Сутність кожного рішення, прийнятого керівництвом, полягає у виборі найкращої альтернативи з декількох запропонованих за конкретно та попередньо визначеними критеріями.

Питання для контролю знань

1. Яка інформація є в матриці післядій?
2. Як обчислити ризик при прийнятті кожного з рішень для певної ситуації?
3. Як розуміти невизначеність умов?
4. Чому середнє квадратичне відхилення для результатів при кожному рішенні може бути показником ризику?
5. За яким принципом побудований метод Вальда вибору стратегії?
6. За яким принципом побудований метод максимізації середнього результату?
7. За яким принципом побудований метод Севіджа?
8. За яким принципом побудований метод мінімізації середнього ризику?
9. За яким принципом побудований метод аналізу кожної стратегії?

3.6. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ МОДЕЛІ В МЕНЕДЖМЕНТІ

Критеріальний підхід до вибору альтернатив

Будемо вважати, що ***прийняття рішень*** (вибір) це дія над множиною альтернатив, в результаті якої отримується підмножина вибраних альтернатив (зокрема одна альтернатива). Звужувати множину альтернатив можливо, якщо існує спосіб порівняння альтернатив між собою і визначення переважаючих. Кожен такий спосіб називається ***критерієм переваг***.

Зрозуміло, що процедурі прийняття рішень передує процедура формування множини альтернатив і завчасно визначені цілі, заради досягнення яких здійснюється вибір. Найбільш простим і часто вживаним являється критеріальний підхід до визначення альтернатив – суть якого полягає в тому, що кожну альтернативу можна оцінювати конкретним дійсним числом, а порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм дійсних чисел.

Позначимо через X множину всіх альтернатив, а її елементи через x. На множині X задамо функцію $f(x)$, яка володіє властивістю, що якщо альтернатива x_1 переважає альтернативу x_2, то $f(x_1) > f(x_2)$ і навпаки.

Таку функцію називають: ***критерієм, критерієм якості, цільовою функцією, функцією переваг, функцією корисності.*** Якщо крім цього вважати, що значення критерію виражає оцінку наслідку вибору альтернативи x, тоді природно вибирати альтернативу x^*, яка дає найбільше значення критерію:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f(x).$$

Проте, як показує практика, оцінка альтернативи одним критерієм є занадто великим спрощенням ситуації. Життя вимагає оцінювати альтернативи не по одному, а по декількох критеріях, які якісно відрізняються між собою. Наприклад, при проектуванні літака конструкторам необхідно врахувати багато критеріїв, таких як:

1) технічні: висота польоту, швидкість, вантажопідйомність, необхідна довжина злітно-посадочної смуги, тривалість польоту, вага літака та ін.;

2) економічні: затрати на виробництво, експлуатацію і обслуговування, конкурентноздатність;

3) екологічні: рівень шуму, забруднення атмосфери;

4) ергономічні: умови роботи екіпажу, рівень комфорту пасажирів та ін.

Будемо вважати, що кожна альтернатива оцінюється m критеріями: $f_i(x),\ i = \overline{1,m}$. Без обмеження загальності можна вважати, що всі частинні критерії $f_i(x)$ діють в одному і тому ж напрямку (інгредієнті), тобто виражають лише позитивні або лише негативні якості альтернативи. Цього легко добитися за рахунок зміни знаків окремих частинних критеріїв.

Методи багатокритеріальної оптимізації

Нормалізований мультикритерій

Відмітимо також, що з метою покращення вибору часто переходять до ***нормалізованого мультикритерію*** $f_i'(x),\ i=\overline{1,m}$, шляхом введення безрозмірних величин, приведення до однієї розмірності, тощо.

Наведемо найбільш часто вживані способи нормалізації:

а) зведення до безрозмірних величин

$$f_i'(x) = f_i(x) / \rho(f_i(x)),$$

де $\rho(\cdot)$ – деяка функція;

б) зведення до однієї розмірності

$$f_i'(x) = f_i(x) / \alpha(i),$$

де $\alpha(i)$ – деяка вагова функція;

в) зміна напрямку (інгредієнта)

$$f_i'(x) = -f_i(x) \text{ або } f_i'(x) = 1 / f_i(x);$$

г) природній

$$f_i'(x) = \frac{f_i(x) - f_{\min}(x)}{f_{\max}(x) - f_{\min}(x)},$$

де $f_{\min}(x) = \min\limits_{i \in \overline{1,m}} f_i(x),\ f_{\max}(x) = \max\limits_{i \in \overline{1,m}} f_i(x);$

д) порівняння

$$f_i'(x) = f_i(x) / \max_{x \in X} f_i(x);$$

е) усереднення

$$f_i'(x) = f_i(x) / \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \, .$$

Припустимо, що в множині X існує альтернатива $\bar{x}$, яка приймає найбільше значення по всіх m критеріях:

$$f_i(\bar{x}) > f_i(x), \;\; i = \overline{1,m}, \text{ для всіх } x \in X \, .$$

Тоді ця альтернатива $\bar{x}$ являється найкращою і проблеми вибору в такій ситуації не існує. На практиці такі випадки малоймовірні. Більш реальною є ситуація, коли найбільші значення критерії досягають на різних альтернативах. Розглянемо основні підходи до розв’язування багатокритеріальних задач.

Суперкритерій

Зведення багатокритеріальної задачі до однокритеріальної здійснюється введенням ***суперкритерію***, тобто скалярної функції векторного аргументу:

$$f_0(x) = \overline{f_0}\left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x) \right). \qquad (3.6.1)$$

Після скорочень розв’язується звичайна оптимізаційна задача. Знайти:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f_0(x) \;\; \left(\text{або } x^* = \arg\min_{x \in X} f_0(x) \right).$$

Наведемо приклади найуживаніших згорток:

а) лінійна:

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha(i) f_i(x);$$

б) максимізацій на:

$$f_0(x) = \max_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

в) мінімізаційна:

$$f_0(x) = \min_{i \in \overline{1,m}} [\alpha(i) f_i(x) + \beta(i)];$$

г) мультиплікативна:

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} \alpha(i) f_i(x);$$

д) Кобба – Дугласа:

$$f_0(x) = \prod_{i=1}^{m} [\alpha(i) f_i(x)]^{\beta(i)},$$

де $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $i = \overline{1,m}$ – задані функції натурального аргументу i, $i = \overline{1,m}$.

Вкажемо на недоліки пов'язані з використанням суперкритерію:

- важко обґрунтувати використання певного типу згортки;
- існує проблема вибору параметрів згортки – функцій $\alpha(i)$, $\beta(i)$, $i = \overline{1,m}$;
- незначна зміна функції, яка визначає згортку, приводить до значних відхилень розв'язків задачі багатокритеріальної оптимізації.

Метод головного частинного критерію

Наведені вище недоліки згортання декількох критеріїв обумовили появу інших підходів до розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації. Один із них полягає у використанні того факту, що частинні критерії нерівнозначні між собою, через те виділяють ***основний, головний критерій*** $f_{i_0}(x)$, а решту критеріїв вважають ***додатковими.*** Головний критерій максимізують при умові, що додаткові критерії залишаються на заданих їм рівнях.

Розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації знаходять як розв'язок задачі на умовний екстремум:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f_{i_0}(x) \tag{3.6.2}$$

при обмеженнях:

$$f_i(x) = c_i, \;\; i = 1, 2, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., m. \tag{3.6.3}$$

У багатьох практичних задачах обмеження (3.3) на додаткові критерії формулюються не у формі рівностей, а у формі нерівностей (наприклад, якщо додаткові критерії характеризують вартість витрат, то замість фіксації витрат розумніше задавати їх верхній рівень) і в результаті приходимо до наступної задачі:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} f_{i_0}(x) \qquad (3.6.4)$$

при обмеженнях:

$$f_i(x) \le c_i, \quad i = 1, 2, ..., i_0 - 1, i_0 + 1, ..., m. \qquad (3.6.5)$$

Метод послідовних поступок

В методах оптимізації (3.6.2-3.6.3) і (3.6.4-3.6.5) різниця між основним і додатковими критеріями виглядає досить сильною. В методі ***послідовних поступок*** ця різниця дещо пом'якшується. Припускається, що критерії пронумеровані у порядку їх важливості, так що $f_1(x)$– найважливіший з критеріїв, а $f_m(x)$– найменш важливий. На першому кроці розв'язується задача мінімізації критерію $f_1(x)$**:**

$$x_1^* = \arg\max_{x \in X} f_1(x).$$

Нехай $f_1^{\max} = f_1(x_1^*)$. З практичних міркувань та прийнятої точності визначається поступка $\boldsymbol{\Delta_1 > 0}$ (тобто величина, на яку зменшується досягнуте значення $\boldsymbol{f_1^{\max}}$ найважливішого критерію, щоб за рахунок поступки постаратися наскільки це можливо, збільшити значення наступного по важливості критерію $f_2(x)$) і розв'язується задача оптимізації:

$$x_2^* = \arg\max_{x \in X} f_2(x)$$

при обмеженнях:

$$f_1(x) \ge f_1^{\max} - \Delta_1.$$

Визначається $f_2^{\max} = f_2(x_2^*)$ і поступка $\boldsymbol{\Delta_2 > 0}$.

На k-му кроці розв'язується задача:

$$x_k^* = \arg\max_{x \in X} f_k(x)$$

при обмеженнях:

$$f_1(x) \geq f_1^{\max} - \Delta_1,$$
$$f_2(x) \geq f_2^{\max} - \Delta_2,$$
$$\ldots$$
$$f_{k-1}(x) \geq f_{k-1}^{\max} - \Delta_{k-1}.$$

Якщо значення x_m^* задовільне, то його приймають за розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації, інакше переходять на перший крок, змінюючи (збільшуючи) $\mathbf{\Delta_1}$ і т.д.

Пошук альтернативи із заданими властивостями

Третій підхід багатокритеріального вибору відноситься до того випадку коли завчасно можуть бути вказані бажані значення частинних критеріїв (або їх границі), і задача полягає в тому, щоб знайти альтернативу, яка задовольняє цим вимогам, або чи встановити, що такої альтернативи у множині X не існує і вказати альтернативу, яка підходить до поставленої цілі ближче всього.

Бажані значення критеріїв $\overline{f_i},\ i=\overline{1,m}$ задають або точно, або у вигляді верхніх чи нижніх границь. Значення $\overline{f_i},\ i=\overline{1,m}$ називають ***рівнями вимог***, а точку їх перетину x^* в m- вимірному просторі критеріїв ***ціллю*** (**опорною точкою чи ідеальною точкою**).

Оскільки рівні вимог задаються без точного знання структури множини X, то цільова точка може лежати як всередині так і поза множиною X (досяжна чи недосяжна ціль). Оптимізаційна задача полягає в побудові послідовності альтернатив $x^k,\ k=0,1,\ldots$, яка б в границі наближалася до x^*. Для цього вводиться числова міра близькості між альтернативою x і ціллю x^*, тобто між векторами $f(x)=\left(f_1(x), f_2(x),\ldots, f_m(x)\right)$ і $\overline{f}=(\overline{f}_1, \overline{f}_2,\ldots,\overline{f}_m)$.

Може бути використана також функція відстані:

$$d_k(x)=\overline{d}_k\left(f(x),\overline{f}\right)=\left[\sum_{i=1}^{m} w_i\left|f_i(x)-\overline{f}_i\right|^k\right]^{1/k},$$

де параметр $k \in \mathrm{N}$, $w_i,\ i=\overline{1,m}$ – вагові коефіцієнти.

Використовується також наступна функція відстані:

$$d(x)=\overline{d}\left(f(x),\overline{f}\right)=\min_{i\in\overline{1,m}}\alpha_i\left(f_i(x)-\overline{f}_i\right)+\alpha_{m+1}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f_i(x)-\overline{f}_i\right),$$

причому робиться припущення про невід'ємність різниці $f_i(x)-\overline{f}_i,\ i=\overline{1,m}$; $\alpha_i,\ i=\overline{1,m}$ – коефіцієнти, які приводять доданки до однакової розмірності і одночасно враховують різну важливість критеріїв; коефіцієнт α_{m+1} виражає відношення до того, що важливіше – зменшити близькість до цілі будь-якого із частинних критеріїв чи сумарну близькість всіх критеріїв до цільових значень.

У випадку коли частина бажаних значень критеріїв є обмеженнями частинних критеріїв знизу:

$$f_i(x)\geq \overline{f}_i,\ \ i=1,2,..,m',$$

інша частина є обмеженням зверху:

$$f_i(x)\leq \overline{f}_i,\ \ i=m'+1,..,m'',$$

а решту обмежень виконуються як рівності:

$$f_i(x)=\overline{f}_i,\ \ i=m''+1,..,m,$$

то функцію відстані можна вибирати в наступному вигляді:

$$d(x)=\overline{d}\left(f_i(x),\overline{f}\right)=\min_{i\in\overline{1,m}}F\left(f_i(x),\overline{f}_i\right)+\alpha_{m+1}\sum_{i=1}^{m}F\left(f_i(x),\overline{f}_i\right),$$

де

$$F\left(f_i(x),\overline{f}_i\right)=\begin{cases}\alpha_i\left(f_i(x)-\overline{f}_i\right), & \text{якщо }\ 1\leq i\leq m',\\ \alpha_i\left(\overline{f}_i-f_i(x)\right), & \text{якщо }\ m'+1\leq i\leq m'',\\ \alpha_i\min\left\{f_i(x)-\overline{f}_i,\overline{f}_i-f_i(x)\right\}, & \\ & \text{якщо }\ m''+1\leq i\leq m.\end{cases}$$

Метод бажаної точки

Для кожного критерію $\overline{f}_i(x),\ i=\overline{1,m}$ розраховується найбільше і найменше його значення на множині альтернатив X:

$$f_i^{\max}=\max_{x\in X}f_i(x);\ \ f_i^{\min}=\min_{x\in X}f_i(x),\ \ i=\overline{1,m}.$$

Далі переходять до нових (нормованих, безрозмірних) критеріїв:

$$w_i(x), \quad i = \overline{1,m}:$$

$$w_i(x) = \frac{f_i^{\max} - f_i(x)}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \quad i = \overline{1,m}.$$

На k-му кроці алгоритму на основі аналізу вибираються бажані значення критеріїв:

$$h_i^k \in [f_i^{\min}, f_i^{\max}], \quad i = \overline{1,m}$$

і на цій основі розраховуються значення:

$$w_i^k = \frac{f_i^{\max} - h_i^k}{f_i^{\max} - f_i^{\min}}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Потім обчислюють вагові коефіцієнти нових критеріїв:

$$\alpha_i^k = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{m} w_j^k}{\sum_{j=1}^{m} \prod_{l=1, l \neq j}^{m} w_l^k}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Ефективна альтернатива x^k знаходиться як розв'язок однокритеріальної задачі:

$$x^k = \arg\max_{x \in X} \min_{i=\overline{1,m}} \alpha_i^k w_i(x).$$

У знайденій точці x^k обчислюється значення всіх критеріїв

$$\left(f_1(x^k), f_2(x^k), ..., f_m(x^k)\right).$$

Якщо цей вектор значень критеріїв задовольняє особу, що приймає рішення, то x^k – шукана альтернатива; інакше здійснюється перехід на $(k+1)$-й крок, тобто на основі аналізу вибираються нові бажані значення критеріїв h_i^{k+1}, $i = \overline{1,m}$ і т.д.

Приклад постановки задачі багатокритеріальної оптимізації

Задача проектування оптимального програмного комплексу

При проектуванні програмного комплексу (ПК) необхідно забезпечити виконання декількох вимог: зменшити вартість ПК, збільшити точність задання вхідних даних, скоротити об'єм оперативної пам'яті, зменшити час роботи ПК, зменшити завантаження каналів зв'язку між ЕОМ і зовнішніми запам'ятовуючими пристроями і т.п.

Припускається, що ПК повинен реалізувати множину операцій $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Під операцією розуміється, наприклад, розв'язування лінійних чи нелінійних алгебраїчних рівнянь, систем лінійних чи нелінійних диференціальних рівнянь, знаходження екстремумів функцій певного типу, сортування інформації, пошук інформації і т.д.

Кожна із операцій $a_i \in a$ може бути реалізована будь-якою програмою із заданої множини $P_i = \left(p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{ik_i}\right)$, $i = \overline{1,n}$. Кожна програма p_{ij} характеризується своїми ознаками, які впливають на вимоги до ПК. Програмний комплекс представляє собою набір програм:

$$P = \left(p_{1j_1}, p_{2j_2}, ..., p_{nj_n}\right),$$

де $p_{ij_i} \in P_i$, $i = \overline{1,n}$.

Для оцінки якості програмного комплексу $P = (p_{1j_1}, p_{2j_2}, ..., p_{nj_n})$ вводиться векторний критерій $\varphi(P) = (\varphi_1(P), \varphi_2(P), ..., \varphi_m(P))$. Відображення $\varphi : P \to R^m$ задає правило, по якому кожному набору із n програм відповідає векторна оцінка виконання вимог до ПК.

Таким чином задача проектування оптимального програмного комплексу являється багатокритеріальною оптимізаційною задачею.

Питання для контролю знань

1. Який спосіб називається критерієм переваг?
2. Суть критеріального підходу.
3. Що таке нормалізований мультикритерій?
4. Для чого вводиться суперкритерій?
5. Які недоліки пов'язані з використанням суперкритерію?

6. В чому полягає метод головного частинного критерію?
7. Що називають рівняннями вимог?
8. Який зміст методу послідовних поступок?
9. Що таке опорна точка, або ідеальна?
10. В чому полякає метод бажаної точки?

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 3

Задачі до пункту 3.1

Задача 1.

Розглянемо СМО з відмовами з параметрами (n, λ, μ). Розрахувати основні характеристики роботи системи. Намалювати граф станів системи. Зробити висновок щодо ефективності роботи розрахованої системи.

Варіанти

№	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
n	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
λ	10	12	12	12	14	15	15	15	16	18	18	20	20	20	10
μ	5	8	5	6	7	10	6	10	8	6	9	8	10	15	5
№	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***	***21***	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***
n	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
λ	24	13	18	14	25	12	40	24	24	21	26	28	28	30	30
μ	8	5	6	7	10	6	10	8	6	7	13	7	14	10	15

Задача 2.

Для нового офісу фірми треба надати проект щодо кількості телефонних номерів. Маємо приблизні розрахунки щодо густини вхідних дзвінків за годину (λ) та середнього протягу однієї розмови ($\bar{t}_{зайн.кан.}$) у хвилинах. Треба надати обґрунтовані пропозиції щодо кількості номерів з обов'язковим виконанням умови: більш за 80 % дзвінків мають бути прийняті ($P_{обсл.} > 0,8$). Треба розрахувати основні характеристики системи з одним номером, з двома і далі, поки буде $P_{обсл.} > 0,8$. Результати надати у вигляді таблиці.

Характеристики	**Кількість апаратів**			
	n=1	***n=2***	***n=3***	…………….
P_O				
$P_{відм.}$				
$P_{обсл.}$				
$\lambda_{обсл.}$				
$\bar{k}$				
$\bar{t}_{повн.сист.}$				
$\bar{t}_{сист.}$				

Зробити висновок щодо проектування системи (щодо кількості номерів). Побудувати графік залежності ймовірності обслуговування від кількості каналів обслуговування.

Варіанти

№	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	*7*	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
λ за 1 год	10	10	12	12	14	14	15	16	16	16	18	18	18	20	20
$\bar{t}$ (хв.)	15	20	15	20	12	15	12	12	15	12	12	10	12	12	10
№	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***	***21***	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***
λ за 1 год	21	22	24	24	30	10	10	12	12	14	14	15	16	16	16
$\bar{t}$ (хв.)	10	12	10	7,5	6	12	15	20	15	10	20	20	20	12	20

Задача 3.

До інформаційного центру надходять вимоги щодо набору текстів на комп'ютері. У середньому за 1 годину надходять λ сторінок. На роботу можна взяти:

1) 1 робітник, який в змозі друкувати 1 сторінку за ***t*** хвилин;
2) 2 робітника, кожний з яких в змозі друкувати 1 сторінку за ***2t*** хвилин.

Розрахувати основні характеристики цих двох систем. Результати надати у вигляді таблиці. Надати граф станів кожної системи.

	$\mathbf{P}_{\mathbf{відм.}}$	$\mathbf{P}_{\mathbf{обсл.}}$	$\bar{k}$	$\lambda_{обсл.}$	$\bar{t}_{сист.}$	$\bar{t}_{повн.сист.}$
I						
II						

Порівнюючи результати, надати висновок щодо ефективності праці цих систем.

Варіанти

t (хв.) \ λ	**20**	**25**	**30**	**35**
20	№1	№2	№3	№4
15	№5	№6	№7	№8
10	№9	№10	№11	№12
6	№13	№14	№15	№16
5	№17	№18	№19	№20
25	№21	№22	№23	№24
24	№25	№26	№27	№28
12	№29	№30		

Задача 4.

Для свого варіанту задачі №1 зробити розрахунки показників роботи системи, якщо можливе очікування обслуговування (черга заявок). Порівняти показники з результатами задачі №1 та зробити висновок щодо ефективності роботи двох систем (без черги та з чергою). Результати надати в таблиці. Надати граф станів системи.

	P_o	P_n	$\lambda_{обсл}$	$\bar{k}$	$\bar{r}$	$\bar{t}_{чер}$	$\bar{t}_{сист}$
СМО без черги							
СМО з чергою							

Задачі до пункту 3.2

Задача 5.

Виробництво (або торговельна точка) має потребу у сировині (або товарі) в розмірі Q одиниць протягом $\Delta \boldsymbol{T}$ одиниць часу, причому цей продукт використовується неперервно та рівномірно. Продукт (сировина або товар) постачається партіями однакового обсягу через однакові інтервали часу.

Завдання 1. Визначити оптимальний розмір партії, оптимальну кількість партій та оптимальний інтервал часу між постачанням продукту протягом часу ΔT за умови відсутності дефіциту. Показати ці результати на малюнку.

Завдання 2. Визначити ті ж самі величини за умови наявності дефіциту та порівняти результати. Показати ці результати на малюнку. Обчислити і відмітити на малюнку інтервал часу Δt.

Завдання 3. Оцінити у відсотках відносне відхилення загальної вартості від мінімальної на утворення та зберігання продукту, якщо розмір партії відхиляється від оптимального на величину Δq.

Завдання 4. Надати приклад реальної ситуації за цими умовами.

Варіанти задачі

Величини $\mathbf{c}_{\mathbf{збер}}$ та $\mathbf{c}_{\mathbf{деф}}$ надані у грошових одиницях на 1 добу, $\mathbf{c}_{\mathbf{утв}}$ у грошових одиницях.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Q	60000	4000	3000	2000	1000	2000	5000	500	4000	10000
ΔT, *міс.*	1	2	1	1	1	1	1,5	2	1	1
$c_{утв}$	1000	200	150	1000	500	1500	300	150	200	150
$c_{збер}$	0,8	0,5	0,2	0,8	0,2	1	0,4	0,7	0,02	0,5
$c_{деф}$	1	1,5	0,5	0,4	1,6	3	0,8	1,2	0,1	1
Δq	200	50	60	40	10	70	10	10	30	30

	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Q	300	3650	1500	600	1800	600	5500	12000	500	5000
ΔT	1 рік	1 рік	2 міс.	70 днів	1 рік	1 рік	50 днів	100 днів	2 міс.	3 міс.
$c_{утв}$	150	100	2000	300	400	100	400	600	250	270
$c_{збер}$	1,5	0,25	3	0,3	2	0,6	0,2	0,7	0,25	0,1
$c_{деф}$	2	0,4	10	0,4	1	0,8	1	0,4	0,4	0,5
Δq	2	50	90	4	5	10	70	100	5	70

	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Q	3000	6000	24000	2000	3000	1000	100	200	1500	1000
ΔT	3 міс.	4 міс.	200 днів	2 міс.	1 міс.	20 днів	1 рік	1 рік	10 міс.	40 днів
$c_{утв}$	200	300	1200	100	100	50	200	300	400	600
$c_{збер}$	1,5	0,75	0,8	0,5	0,02	0,5	0,1	2	1,5	0,3
$c_{деф}$	0,8	1,25	0,3	0,8	0,04	1	0,5	1	0,6	1,7
Δq	30	50	100	20	200	20	10	3	10	80

Задачі до пункту 3.3

Задача 6.

Використовуючи теоретичний матеріал Розділу 4, побудувати граф мережі робіт та проаналізувати його.

<u>Завдання 1.</u> На підставі стовпчика „Робота" у наданій таблиці варіантів, побудувати мережу робіт, при чому будь-яка подія з більшим номером має бути праворуч від події з меншим номером. Стрілками з'єднати події згідно із вказаними роботами. Вказати час виконання кожної роботи згідно з обраним варіантом.

<u>Завдання 2.</u> Обчислити всі шляхи від початкової до завершальної подій та вказати критичний шлях.

<u>Завдання 3.</u> Обчислити резерви кожного шляху. Результати вказати в таб.1.

Таблиця 1

Шлях	Довжина шляху t_s	Резерв шляху R_s

У стовпчику шлях вказати події, крізь які йде цей шлях.

<u>Завдання 4.</u> Для кожної події обчислити найраніший і найпізніший час її здійснення.

<u>Завдання 5.</u> Обчислити резерви часу кожної події. Результати надати в таб. 2.

Таблиця 2

№ події	t_p	t_n	R(i)

<u>Завдання 6.</u> Для деяких робіт, які не належать критичному шляху, обчислити коефіцієнти напруги та резерви її виконання. Результати надати в таб.3.

Таблиця 3

Робота ***(i, j)***	Коефіцієнт напруги $K_{напр}(i, j)$	Резерв роботи ***R(i, j)***

<u>Завдання 7.</u> Надати аналіз запланованого обсягу робіт та вказати можливості його поліпшення.

Кількість подій дорівнює 8: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Робота	***Варіанти терміну робіт***																												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(0,1)	8	9	2	4	1	9	3	8	7	5	4	7	4	3	7	7	8	7	6	3	8	8	5	3	2	9	4	7	6	6
(0,3)	9	8	11	8	4	6	2	5	7	4	10	8	3	5	6	4	5	5	4	10	10	9	7	10	3	5	3	4	6	3
(1,2)	4	5	7	5	3	5	6	6	5	6	5	3	6	7	3	5	10	4	6	4	3	4	6	8	4	6	7	5	4	7
(1,3)	7	6	4	10	8	8	7	4	9	12	7	6	10	6	7	10	3	6	10	5	8	7	9	4	7	7	8	3	8	11
(1,5)	6	5	3	4	7	5	4	10	4	8	4	5	5	10	4	3	4	10	7	6	5	4	5	2	8	6	5	9	3	9
(2,5)	3	2	5	1	5	4	5	7	3	5	3	2	7	4	1	2	9	3	5	5	4	3	1	5	4	3	6	6	2	4
(3,4)	9	9	2	3	6	10	9	5	11	7	12	8	10	2	8	9	7	5	4	7	4	3	6	8	9	2	4	7	1	11
(3,5)	3	4	9	5	10	4	3	8	2	10	2	2	6	3	5	6	7	7	11	9	8	10	2	3	6	9	10	4	10	6
(3,6)	3	6	5	9	4	4	7	3	3	4	8	2	5	7	6	5	6	4	3	4	9	10	3	9	10	10	6	8	8	7
(4,6)	4	2	4	2	5	6	10	4	4	3	9	5	9	5	3	6	7	6	2	3	5	2	3	3	6	7	11	3	3	4
(4,7)	5	6	3	3	2	6	5	6	8	2	7	4	7	6	7	9	5	4	7	7	3	5	10	4	5	5	8	2	2	5
(5,6)	10	9	8	4	11	11	5	9	9	8	6	9	8	9	8	3	8	9	10	9	4	7	2	4	3	5	6	5	7	1
(6,7)	7	3	6	2	6	8	10	7	5	4	9	7	8	7	5	4	9	8	7	5	8	2	4	1	5	8	11	6	4	5

ГЛОСАРІЙ

А

Адекватність моделі – відповідність суттєвим властивостям реального об’єкта.

Аксіома інваріантності щодо лінійного перетворення

Якщо платіжні матриці двох ігор з однаковим числом ходів для кожного гравця інваріантні щодо лінійного перетворення, то і відповідні арбітражні рішення інваріантні щодо лінійного перетворення з тими ж коефіцієнтами інваріантності.

Аксіома незалежності незв'язаних альтернатив

Якщо до гри додати нові ходи гравців з додаванням нових елементів платіжних матриць таким чином, що точка status quo не міняється, то або арбітражне рішення також не міняється, або воно співпадає з однією з доданих операцій.

Аксіома оптимальності по Парето

Арбітражне рішення повинне бути елементом переговорної множини.

Аксіома симетрії в теорії ігор

Якщо гравці знаходяться в однаковій ситуації, то і арбітражне рішення повинне бути однаковим.

Алгоритм – певна чітка наперед задана послідовність дій (кроків).

Алгоритм методу Гоморі

один з алгоритмів знаходження рішення задачі цілочисельного програмування групи методів відсікаючих площин.

Алгоритм симплекс-метода – алгоритм послідовного поліпшення плану, що дозволяє здійснювати перехід від одного допустимого базисного рішення до іншого таким чином, що значення цільової функції безперервно зростають (для задачі на максимум) і спадають (для задачі на мінімум) та за кінцеве число кроків знаходиться оптимальний план.

Алгоритм поліпшення плану транспортної завдачі – алгоритм переходу до нового опорного плану транспортної задачі, що дає менше значення функції витрат, до знаходження оптимального плану.

Аналогія – подібність.

Арбітраж
знаходження сумісної стратегії за допомогою незацікавленої особи.

Б

Балансова умова транспортної задачі – умова рівності загального обсягу запасів та загального обсягу потреб у транспортній задачі.

Булівське програмування
розділ математичного програмування, що займається розробкою методів рішення специфічних задач цілочисельного програмування, коли змінні можуть приймати значення 1 або 0.

В

Варіантні розрахунки – метод аналізу, який оснований на співставленні різних варіантів планів задач.

Вектор-градієнт – див. направляючий вектор.

Вектор коефіцієнтів – вектор, компонентами якого є коефіцієнти цільової функції задачі; або обсяги обмежень, що визначають допустиму область існування планів задачі.

Вершина опуклого многогранника – це будь-яка точка опуклого многогранника, яка не є внутрішньою точкою ніякого відрізка що цілком належить цьому многограннику.

Відкрита транспортна задача – задача з порушеною балансовою умовою.

Відрізок – безліч точок, які можуть бути представлені у вигляді опуклої лінійної комбінації даних двох точок.

Вибір рішень в умовах невизначеності

ігри, де одним з визначальних чинників є зовнішнє середовище або природа, яка може знаходиться в одному із станів, які невідомі особі, що ухвалює рішення.

Вироджений опорний план – опорний план, число ненульових компонент якого менше числа обмежень задачі.

Г

Геометрична інтерпретація задач – інтерпретація залежностей, що мають місце в задачі програмування у вигляді геометричних фігур (точок, прямих, півплощин, багатокутників, областей) в Декартовій системі координат.

Геометричне програмування

розділ математичного програмування, що займається завданнями найбільш щільного розташування об'єктів в заданій двовимірній або тривимірній області.

Геометричний розв'язок гри

знаходження рішення гри за допомогою уявлення даних завдання у вигляді геометричних фігур на координатній площині.

Гра n осіб з постійною сумою

гри, в якійх бере участь n гравців, існує n безлічі стратегій і n дійсних платіжних функцій від n змінних, кожна з яких є елементом відповідної множини стратегій. Кожен гравець знає всю структуру гри і в своїй поведінці незмінно керується бажанням одержати максимальний середній виграш.

Гра двох осіб з ненульовою сумою

гра, в якій сума виграшів двох гравців після кожної партії не рівна нулю.

Гра двох осіб з нульовою сумою

гра, в якій інтереси двох гравців строго протилежні, тобто виграш одного є програшем іншого.

Гра з природою

гра, де одним з визначальних чинників є зовнішнє середовище або природа, яка може знаходиться в одному із станів, які невідомі особі, що ухвалює рішення.

Гра з нульовою сумою

гра, в якій сума виграшу гравців після кожної партії складає нуль.

Д

Двоїста задача лінійного програмування – задача лінійного програмування, яка може бути побудована з умов початкової задачі лінійного програмування згідно відповідним правилам.

Двоїсті (подвійні) оцінки – значення змінних двоїстої задачі до даної. Використовуються для аналізу розв'язку задачі.

Динамічне програмування – розрахунковий метод рішення екстремальних задач певної структури, що є направленим послідовним перебором варіантів, який обов'язково приводить до глобального максимуму.

Дискретне програмування

розділ математичного програмування, в якому на невідомі задачі накладається умова дискретності змінних за кінцевої області допустимих значень.

Друга канонічна (або симетрична) форма (постать) ЗЛП – такий запис задачі лінійного програмування, в якому: якщо цільова функція вимагає знаходження ***максимуму***, система основних обмежень задачі включає лише нерівності типу „$\leq$"; якщо цільова функція вимагає знаходження ***мінімуму***, то система основних обмежень задачі включає лише нерівності типу „$\geq$". В обох випадках змінні задачі невід'ємні.

Другий метод Гоморі

один з групи методів відсікаючих площин для знаходження рішення частково цілочисельної задачі.

Допустима область задачі лінійного програмування – сукупність опорних планів задачі лінійного програмування.

Дослідження операцій – наука, що займається розробкою і практичним застосуванням методів оптимального управління організаційними системами.

Достовірність інформації – точність характеристики процесу або явища.

Е

Економіко-математична модель – концентрований вираз найсуттєвіших взаємозв'язків і закономірностей процесу функціонування економічної системи у математичній формі.

Епсілон-прийом
один з прийомів зняття виродженості при рішенні транспортної задачі.

З

Задача дробово-лінійного програмування – задачі, що поряд лінійною системою обмежень мають цільову функцію, записану у вигляді дробу, чисельником і знаменником якого є лінійні функції.

Задача лінійного програмування – характеризується тим, що цільова функція є **лінійною функцією** змінних, а область допустимих значень визначається системою **лінійних** рівнянь та нерівностей.

Задача математичного програмування – у загальній постановці задача виглядає таким чином: є деякі змінні та функція цих змінних, яка носить назву цільової функції. Ставиться завдання: знайти екстремум (максимум або мінімум) цільової функції за умови, що змінні $\boldsymbol{x}$ належать деякій області $\boldsymbol{G}$.

Задача про дієту – виникає при складанні найекономнішого (тобто найдешевшого) раціону (дієти) годівлі (харчування) тварин (людей), що задовольняє певні вимоги.

Задача про комівояжера

Комівояжер повинен відвідати один, і лише один, раз кожне з n міст і повернутися в початковий пункт. Довжина його маршрута має бути найкоротшим із усіх можливих.

Задача про призначення

Маємо n виконавців, які можуть виконувати n різних робіт. Відома корисність, пов'язана з виконанням і-м виконавцем j-й роботи $\left(i, j=\overline{1,n}\right)$. Необхідно призначити виконавців на роботи так, щоб добитися максимальної сумарної корисності, за умови, що кожен виконавець може бути призначений тільки на одну роботу і за кожною роботою повинен бути закріплений тільки один виконавець.

Завдання про складання плану виробництва – виникає при необхідності оптимізації деякого економічного показника, який характеризує стан підприємства, при цьому виробництво обмежене наявними сировинними ресурсами.

Закрита транспортна задача – див. збалансована ТЗ.

Збалансована транспортна задача – транспортна задача, в якій виконується умова балансу (балансова умова).

Змішані стратегії

стратегія випадкового вибору ходу гравця.

Змова у грі

сумісні дії гравців з метою отримання максимального виграшу.

Зоотехнічні оцінки раціону – мінімально та максимально допустимі обсяги вмісту різних видів поживних речовин, мінеральних речовин тощо.

І

Ігри S-еквівалентні

Це дві гри n-осіб з характеристичними функціями і, визначені на одній і тій же множині гравців і зв'язані співвідношенням $\bar{v}(S)=c\cdot v(S)+\sum_{i\in S}a_i$.

К

Класифікація задач дослідження операцій. Задачі можна розділити на три рівні: детермінований рівень; стохастичний рівень; невизначений рівень.

Класифікація ігор

По виграшу: антагоністичні ігри і ігри з нульовою сумою. По характеру отримання інформації: ігри в нормальній формі (гравці одержують всю інформацію до початку гри) і динамічні ігри (інформація поступає в процесі гри). По кількості стратегій: кінцеві ігри; нескінченні ігри. По складу гравців: безкоаліційні ігри; коаліційні ігри.

Класифікація ігор з ненульовою сумою

Ігри з ненульовою сумою діляться на кооперативні і некооперативні.

Коаліції гравців

об'єднання m гравців в грі n осіб (m менше n) з метою отримання максимального виграшу і виробленні відповідних стратегій.

Коефіцієнти заміщення – див. коефіцієнти структурних зрушень.

Коефіцієнти структурних зрушень – коефіцієнти у стовпцях небазисних змінних симплексної таблиці, яка містить оптимальний план.

Кооперативна гра двох осіб

гра двох осіб, в якій гравці мають можливість домовлятися.

Критерій оптимальності – показник ефективності функціонування системи з точки зору поставленої мети.

Л

Ланцюг транспортної задачі – послідовність клітин ТЗ, у якій кожні дві містяться або в одній колонці або в одному рядку, і ніяка третя і більше клітин цієї колонки чи рядка не є клітинами даного ланцюга.

Лінійне програмування – розділ математичного програмування, завданнями якого є знаходження екстремуму лінійної цільової функції при лінійній системі обмежень на допустимій області значень аргументів.

М

Максимінна стратегія

стратегія гравця, при якій він прагне зробити мінімальний виграш максимальним, тобто одержати якнайкращу вигоду в якнайгірших умовах.

Максимінний критерій

критерій, згідно якому відбувається прагнення отримання максимального виграшу в якнайгіршій ситуації.

Математичне програмування – розділ сучасної математики, завданнями якого розробка методів відшукання екстремумів функціональних залежностей, на змінні величини яких накладено деякі умови.

Матриця коефіцієнтів – матриця, елементами якої є коефіцієнти системи обмежень задачі.

Матрична форма запису задачі лінійного програмування – форма запису задачі лінійного програмування, коли усі елементи задачі представлені в матричних і векторних позначеннях.

Матричні ігри

ігри, математичні моделі яких можна представити у вигляді матриць.

Метод апроксимації Фогеля

один з групи методів початкового опорного плану транспортної задачі.

Метод гілок і меж – один з комбінаторних методів дискретного програмування, при якому гіперплощина, що визначена цільовою функцією задачі, «вдавлюється» всередину многогранника планів відповідної задачі лінійного програмування до зустрічі з найближчою цілочисельною точкою цього многогранника.

Метод Гоморі – один із методів відсікання, за допомогою якого шукаються розв'язки задач цілочисельного програмування.

Метод мінімального елементу – один з групи методів визначення первинного опорного плану транспортної задачі.

Метод коефіцієнтів – допоміжний метод, що використовується для запису обмежень пропорційного зв'язку.

Метод мінімального елементу

один з групи методів визначення початкового опорного плану транспортної задачі.

Метод подвійної переваги

один з групи методів визначення початкового опорного плану транспортної задачі.

Метод потенціалів – один з методів перевірки опорного плану транспортної задачі на оптимальність.

Метод північно-західного кута – один з групи методів визначення первинного опорного плану транспортної задачі.

Метод штучного базису

один з методів, що спрощує визначення початкового опорного плану завдання лінійного програмування у симплекс-таблиці.

Мінімаксна стратегія

стратегія гравця, при якій він прагне зробити максимальний програш мінімальним.

Н

Направляючий вектор – вектор, компонентами якого є значення частинних похідних функції у заданій точці. Для лінійної функції такими компонентами є коефіцієнти при невідомих у виразі функції.

Невироджений опорний план – план, що відповідає вершині допустимої області існування планів задачі, який має ***m*** відмінних від нуля компонент, де m є кількістю обмежень задачі лінійного програмування.

Некооперативна гра двох осіб
гра двох осіб, в якій гравці не мають можливості спілкуватися один з одним, можливість же змови з'являється в ході багатократного повторення гри.

Нульова підстановка – один з прийомів зняття виродженості при рішенні транспортної задачі.

О

Об'єктивно обумовлені оцінки – див. двоїсті оцінки.

Обслуговуючі системи
системи масового обслуговування, що характеризуються вхідним потоком вимог, приладами обслуговування, чергою вимог, потоком вимог, що виходить.

Ознака вершини допустимої області – якщо система з ненульових векторів-стовпців, утворених відповідними стовпцями матриці обмежень є лінійно незалежною і ненульові координати точки Х, задовольняють обмеженням, то ця точка є вершиною допустимої області.

Ознака цілочисельності плану транспортної задачі – якщо всі запаси і потреби задачі виражені цілими числами, то оптимальний план перевезень цілочисельний.

Оптимальний план ЗЛП – розв'язок задачі лінійного програмування, тобто такий план, який належить допустимій області та при якому цільова функція досягає екстремуму.

Основна теорема лінійного програмування – якщо цільова функція приймає максимальне значення в деякій точці допустимої області, то вона приймає це ж значення в крайній точці допустимої області. Якщо цільова функція приймає максимальне значення більше, ніж в одній крайній точці, то вона приймає це ж значення в будь-якій їх опуклій лінійній комбінації.

П

Параметричні задачі – задачі, які містять деякі параметри, тобто величини, що змінюються у певних заданих межах.

Партія гри

сукупність дій гравців, визначена правилами гри і що складається з ходів, після яких гравцям виплачуються виграші.

Передумови в іграх

це вектора, компонентами яких є середнє значення доходу відповідних гравців, які об'єдналися в коаліцію, при цьому доходи повинні бути не менше доходів, що одержуються гравцями поза коаліцією, а весь дохід коаліції повинен бути розподілений між гравцями. Це характерно для гри з постійною сумою.

План

Вектор, компоненти якого задовольняють обмеженням задачі лінійного програмування.

Платіжна матриця гри

матриця розмірності m на n, i=1...,n j=1...,m (i,j)-й елемент якої значення виграшу (програшу) гравців у разі i-го ходу першого гравця і j-го ходу другого гравця.

Позиційні ігри

опис гри як послідовності ходів.

Показники ефективності – коефіцієнти при невідомих у виразі цільової функції економіко-математичної моделі.

Потенціали – змінні, що відповідають змінним двоїстої задачі для даної транспортної задачі.

Правильне відсікання

відсікання, яке задовольняє наступним вимогам: лінійне; відсікає частину області, що не містить допустимих рішень цілочисельної задачі; не відсікає жодного цілочисельного оптимального плану.

Предмет дослідження операцій – системи організаційного управління, які складаються з великого числа взаємодіючих підрозділів, що не завжди узгоджуються між собою.

Предмет теорії ігор

ухвалення рішень в умовах невизначеності, в умовах зіткнення, конфліктних ситуаціях, коли ухвалюючий рішення суб'єкт (гравець), має в своєму розпорядженні інформацію лише про безліч можливих ситуацій, в одній з яких він насправді знаходиться, про безліч рішень, які він може прийняти, і про кількісну міру того виграшу, який він міг би одержати, вибравши в даній ситуації дану стратегію.

Принцип недостатньої підстави

полягає в тому, що всі стани природи вважаються рівно ймовірними.

Р

Розв'язок задачі лінійного програмування – це план, що надає екстремальне значення цільовій функції.

Розв'язок гри

урівноважена пара.

С

Симплекс-метод – універсальний метод розв'язку задач лінійного програмування, що полягає в послідовному поліпшенні планів задачі лінійного програмування, шляхом переходу від одного допустимого базисного рішення до іншого, причому так, що значення цільової функції безперервно зростають (для задач на максимум) і спадають (для задач на мінімум) та за кінцеве число кроків знаходиться оптимальний розв'язок.

Сідлова точка

Точка для якої виконуються умови:

1. $\forall x \in A \quad f(x, y_0) \le f(x_0, y_0)$;

2. $\forall y \in B \quad f(x_0, y_0) \le f(x_0, y)$.

Стандартна (перша канонічна) форма (постать) задачі лінійного програмування – такий запис задачі лінійного програмування, в якому цільова функція вимагає знаходження максимуму або мінімуму, змінні невід’ємні, а система основних обмежень задачі записана у вигляді рівностей.

Стохастичне програмування – розділ математичного програмування, завданнями якого є знаходження розв’язків екстремальних задач, в яких деякі коефіцієнти цільової функції і елементи матриці обмежень є випадковими числами.

Т

Теорема про опуклу точкову множину і опуклу комбінацію цієї множини – нехай G – опукла точкова множина. Тоді будь-яка опукла комбінація точок, що належать цій множині, також належить цій множині.

Теорема про опуклість допустимої множини планів ЗЛП – допустима область задачі лінійного програмування є опуклою точковою множиною.

Теорема про опуклість оптимальних планів ЗЛП – множина оптимальних планів задачі лінійного програмування опукла (якщо вона не порожня).

Теорема про те, що будь-яка точка опуклого многогранника є опуклою комбінацією вершин – будь-яка точка опуклого многогранника є опуклою комбінацією його вершин.

Теорія ігор

теорія математичних моделей ухвалення рішень в умовах невизначеності, в умовах зіткнення, конфліктних ситуаціях, коли ухвалюючий рішення суб'єкт (гравець), має в своєму розпорядженні інформацію лише про безліч можливих ситуацій, в одній з яких він насправді знаходиться, про безліч рішень, які він може прийняти, і про кількісну міру того виграшу, який він міг би одержати, вибравши в даній ситуації дану стратегію.

Техніко-економічні коефіцієнти (ТЕК) – коефіцієнти вираження норм витрат або виходу продукції у розрахунку на одиницю виду виробничої діяльності.

Точка Status quo

точка, координатами якої є максимальні виграші першого і другого гравців відповідно.

Транспортна задача – нехай на ***m*** складах зосереджено однорідний продукт, розподілений в певних кількостях. Цей продукт необхідно доставити до ***n*** пунктів споживання в заданих кількостях. Запаси і потреби збалансовані. Вартість перевезення з конкретного складу в конкретний пункт індивідуальна. Товар повинен бути вивезений зі всіх складів і доставлений в необхідній кількості в кожен пункт. Завдання полягає в мінімізації транспортних витрат.

У

Урівноважена пара

Розв'язок гри.

Умови доповнюючої нежорсткості – умови, що випливають з властивостей розв'язків пари спряжених задач, а саме: добуток значення змінної однієї із задач на різницю між правою та лівою частиною відповідного обмеження двоїстої до неї задачі дорівнює нулю.

Ф

Фіктивні ціни – змінні двоїстої задачі.

Х

Характеристична функція

функція, що дозволяє обчислювати дохід для будь-якої можливої коаліції,

дія гравця, що визначається правилами гри.

Ц

Цикл у транспортній таблиці – замкнений ланцюг, тобто така послідовність клітин ТЗ, у якій перша та остання клітини знаходяться або в одному рядку або в одному стовпці.

Цілочисельна задача

Екстремальна задача, в якій накладається умова цілочисельності усіх компонент плану задачі.

Цілочисельне програмування

розділ математичного програмування, що займається розробкою методів рішення окремого випадку задач дискретного програмування, коли на змінні накладено умова цілочисельності.

Цільова установка – деякий бажаний стан системи.

Цільова функція – функція в математичному програмуванні, для якої потрібно знайти екстремум.

Ціна гри

величина виграшу гравця.

Ч

Частково цілочисельна задача

Екстремальна задача, в якій накладається умова цілочисельності декількох компонент плану задачі.

Числова економіко-математична модель – це таке представлення моделі, у якому мета задачі виражена з допомогою цільової функції а обмеження – у вигляді алгебраїчних рівнянь та нерівностей.

Чисті стратегії

можливі ходи у розпорядженні гравців.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боровик, Олег Васильович. Дослідження операцій в економіці [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. В. Боровик, Л. В. Боровик. – Чернівці : Букрек, 2006. – 420 с.
2. Дослідження операцій [Текст] : методичні матеріали для самостійної роботи / Укоопспілка, Львівська комерційна академія. - Л. : Видавництво Львівської комерційної академії, 2004. – 59 с.
3. Дослідження операцій в економіці [Текст] : підручник / І. К. Федоренко [та ін.] ; ред. І. К. Федоренко, О. І. Черняк. – К. : Знання, 2007. – 558 с.
4. Дослідження операцій в транспортних системах [Текст] : навч. посіб. для студ. напряму "Транспортні технології" вищ. навч. закладів / Національний транспортний ун-т. – К. : НТУ, 2001. – 141 с.
5. Дослідження операцій і методи оптимізації [Текст] : навч. посібник для студ. вищ. навч. закладів / М. Є. Корольов [и др.] ; Відкритий міжнародний ун-т розвитку людини "Україна". – К. : Університет "Україна", 2007. – 177 с.
6. Дослідження операцій у середовищі електронних таблиць Excel [Текст] : навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / І. Ю. Леснікова [та ін.]. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 186 с.
7. Дослідження операцій. Практичний курс [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. Є. Березовський [та ін.]. – Умань : [Сочінський], 2011. – 238 с.
8. Жадлун З.О., Галаєва Л.В., Шульга Н.Г. Математичне програмування : Посібник / З.О. Жадлун, Л.В. Галаєва, Н.Г.Шульга. – К.: ЦП «Компринт», 2013. – 360с.
9. Катренко, Анатолій Васильович. Дослідження операцій [Текст] : підруч. / А. В. Катренко. – Львів: Магнолія – 2006, 2009. – 352 с.
10. Кунда, Н. Т. Дослідження операцій у транспортних системах [Текст] : навч. посібник для студ. напряму "Транспортні технології" вищ. навч. закладів / Н. Т. Кунда. – К. : Слово, 2008. – 400 с.
11. Кутковецький, В. Я. Дослідження операцій [Текст] : навч. посіб. для студ. вищих навч. закл. / В. Я. Кутковецький ; Миколаївський держ. гуманітарний ун-т ім. Петра Могили комплексу "Києво-Могилянська академія". – К. : Видавничий дім "Професіонал", 2004. – 347 с.
12. Кутковецький, Валентин Якович. Дослідження операцій [Текст] : навч. посіб. для студ. вищих навч. закл. /В. Я. Кутковецький; Миколаївський держ. гуманітарний ун-т ім. Петра Могили комплексу

"Києво-Могилянська академія". – Миколаїв : Видавництво МДГУ ім. Петра Могили, 2003. - 259 с.

13. Кутковецький, Валентин Якович. Дослідження операцій [Текст] : підручник / В. Я. Кутковецький. – Миколаїв : Миколаївський держ. гуманітарний ун-т ім. Петра Могили комплексу "Києво-Могилянська академія", 2007. – 270 с.

14. Ларіонов, Юрій Іванович. Дослідження операцій в інформаційних системах [Текст] : навч. посібник для студ. вищих навч. закл. / Ю. І. Ларіонов [и др.] ; Науково-методичний центр вищої освіти, Харківський національний ун-т радіоелектроніки. – Харків. : ХНУРЕ, 2003. - 388 с

15. Ржевський, Сергій Володимирович. Дослідження операцій [Текст] : підручник / С. В. Ржевський, В. М. Александрова. – К. : Академвидав, 2006. – 558 с.

16. Роїк, Олександр Митрофанович. Дослідження операцій як інструментарій стратегічного менеджменту [Текст] : навч. посібник для студ. денної та заоч. форм навчання спец. "Менеджмент організацій", "Інтелектуальні системи прийняття рішень", "Програмне забезпечення автоматизованих систем" / О. М. Роїк [и др.] ; Вінницький національний технічний ун-т. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 181 с.

17. Садовяк, Антон Михайлович. Дослідження операцій [Текст] : навч. посібник / А. М. Садовяк [и др.] ; Чернівецький факультет Національного технічного ун-ту "Харківський політехнічний ін-т". – Чернівці: Прут, 2004. - 198 с.

18. Ульянченко, Олександр Вікторович. Дослідження операцій в економіці [Текст] : підручник для студентів вузів / О. В. Ульянченко. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.

19. Шепеленко, Оксана Владиславівна. Дослідження операцій [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. В. Шепеленко ; Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. Михайла Туган-Барановського, Каф. вищ. і приклад. математики. – Донецьк : ДонНУЕТ, 2012. – 312 с